

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE  
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**Dinámica no lineal de sistemas  
multicuerpo flexibles mediante  
algoritmos conservativos**

**TESIS DOCTORAL**

**Juan Carlos García Orden**

Ingeniero Aeronáutico

**Madrid, 1999**

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS  
CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE  
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**Dinámica no lineal de sistemas  
multicuerpo flexibles mediante  
algoritmos conservativos**

**TESIS DOCTORAL**

por

**Juan Carlos García Orden**

Ingeniero Aeronáutico

Director: José María Goicolea Ruigómez  
Doctor Ingeniero de Caminos

Madrid, 1999

# Resumen

Esta tesis se centra en el estudio de la dinámica no lineal de sistemas multicuerpo. Se entiende como tales los compuestos por sólidos rígidos y deformables conectados mediante distintos tipos de uniones, y con elementos discretos activos como muelles y amortiguadores. Se considera que los cuerpos deformables pueden experimentar grandes desplazamientos y deformaciones, y están representados por modelos de tipo hiperelástico. El medio continuo de cada sólido deformable se discretiza mediante técnicas de elementos finitos.

La configuración del sistema se parametriza mediante las coordenadas cartesianas de puntos, que constituyen un conjunto de parámetros dependientes, y las restricciones se imponen mediante el método de penalización. Este procedimiento permite representar, de una forma simple y sistemática, la dinámica del sistema global mediante un único conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se propone para la integración temporal del movimiento un método del tipo energía-momento, que conserva de forma exacta la cantidad de movimiento, el momento cinético y la energía total en sistemas conservativos. Este método proporciona una gran fiabilidad a los resultados calculados en simulaciones de larga duración, y además supera los problemas tradicionalmente asociados al empleo del método de penalización, concretamente el mal condicionamiento numérico. El resultado es un método robusto y fiable que puede ser aplicado eficazmente en una amplia gama de sistemas multicuerpo flexibles de aplicación práctica.

# Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi familia por su apoyo incondicional y comprensión a lo largo del desarrollo de esta tesis.

Ya en el contexto académico, debo agradecer en primer lugar a mi director de tesis, el Dr. José María Goicolea, su efectiva orientación de mi labor investigadora. También al profesor Juan José Arribas su colaboración y aportación de fructíferas ideas.

Debo agradecer asimismo al profesor Felipe Gabaldón sus comentarios y observaciones, y a todo el resto de compañeros de la Cátedra de Mecánica que han hecho que la elaboración de esta tesis haya sido una experiencia muy enriquecedora.

Finalmente, no puedo dejar de reconocer mi deuda con el proyecto GNU, que me ha permitido usar herramientas de alta calidad como Linux, Geomview, Octave, gcc, Gnuplot, Ghostview, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, etc., que han sido fundamentales en todas las etapas del desarrollo.

# Índice general

<b>1. Introducción y estado de la técnica</b>	<b>1.1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1.1
1.2. Estado de la técnica . . . . .	1.3
1.2.1. Modelos de sistemas multicuerpo flexibles . . . . .	1.3
1.2.2. Algoritmos conservativos aplicados a sistemas multi- cuerpo . . . . .	1.4
1.2.3. Situación de la tesis en el contexto del estado de la técnica . . . . .	1.5
1.3. Objetivos . . . . .	1.6
1.4. Contenido de la tesis . . . . .	1.7
<b>2. Sistemas multicuerpo compuestos por sólidos rígidos</b>	<b>2.1</b>
2.1. Formulación general de las ecuaciones . . . . .	2.1
2.1.1. Sólido rígido libre . . . . .	2.2
2.1.2. Formulación de restricciones . . . . .	2.8
2.2. Cálculo de la matriz de masa de los cuerpos rígidos . . . . .	2.15
2.2.1. Sólido rígido continuo tridimensional . . . . .	2.15
2.2.2. Sólido rígido continuo bidimensional . . . . .	2.20
2.2.3. Sólido rígido continuo unidimensional . . . . .	2.21
2.3. Modelización de uniones . . . . .	2.22
2.3.1. Formulación detallada de restricciones básicas . . . . .	2.26
2.4. Muelles y amortiguadores . . . . .	2.30
2.4.1. Muelles . . . . .	2.30
2.4.2. Amortiguadores viscosos . . . . .	2.32
2.5. Contactos . . . . .	2.33
2.5.1. Cinemática del contacto . . . . .	2.33
2.5.2. Modelización de las fuerzas de contacto . . . . .	2.35
2.5.3. Estrategia de cambio de paso automático . . . . .	2.35
<b>3. Estudio comparativo de algoritmos de integración temporal</b>	<b>3.1</b>
3.1. Introducción . . . . .	3.1
3.2. Métodos de integración estudiados . . . . .	3.2
3.3. Oscilador armónico simple sin amortiguamiento . . . . .	3.5
3.4. Péndulo simple deformable . . . . .	3.17

<b>4. Sistemas multicuerpo de sólidos rígidos y deformables</b>	<b>4.1</b>
4.1. Planteamiento de la elasticidad finita . . . . .	4.1
4.1.1. Medidas de deformación . . . . .	4.2
4.1.2. Medidas de tensión . . . . .	4.3
4.1.3. Ecuaciones básicas de balance mecánico . . . . .	4.3
4.1.4. Ley constitutiva: hiperelasticidad. . . . .	4.4
4.2. Formulación débil general de las ecuaciones . . . . .	4.9
4.2.1. Formulación débil de los cuerpos elásticos . . . . .	4.9
4.2.2. Formulación débil conjunta para cuerpos rígidos y elásticos . . . . .	4.11
4.3. Formulación discreta tridimensional de los cuerpos deformables	4.12
4.3.1. Fuerzas de inercia . . . . .	4.13
4.3.2. Fuerzas externas . . . . .	4.14
4.3.3. Fuerzas internas . . . . .	4.15
4.3.4. Contribución de las fuerzas internas a la matriz tangente global . . . . .	4.17
4.4. Librería básica de elementos deformables . . . . .	4.18
4.4.1. Elementos tridimensionales . . . . .	4.18
4.4.2. Elementos bidimensionales . . . . .	4.21
4.4.3. Elementos unidimensionales elastoplásticos . . . . .	4.28
4.5. Formulación discreta conjunta con cuerpos rígidos y elásticos .	4.35
<b>5. Algoritmo energía-momento</b>	<b>5.1</b>
5.1. Sistemas hamiltonianos . . . . .	5.2
5.1.1. Sistemas hamiltonianos discretos . . . . .	5.3
5.1.2. Integrales primeras . . . . .	5.5
5.1.3. Propiedades conservativas discretas . . . . .	5.6
5.2. Aplicación a la dinámica de la partícula . . . . .	5.7
5.3. Formulación de restricciones . . . . .	5.10
5.3.1. Restricción sobre un único punto . . . . .	5.12
5.3.2. Restricción sobre varios puntos . . . . .	5.19
5.3.3. Varias restricciones generales sobre varios puntos . . . . .	5.22
5.4. Formulación de cuerpos rígidos . . . . .	5.23
5.5. Formulación de muelles y amortiguadores . . . . .	5.23
5.5.1. Muelles . . . . .	5.23
5.5.2. Amortiguadores viscosos . . . . .	5.26
5.6. Formulación de cuerpos deformables . . . . .	5.27
5.6.1. Elementos tridimensionales . . . . .	5.31
5.6.2. Elementos unidimensionales . . . . .	5.31
5.7. Formulación de contactos . . . . .	5.33
5.8. Aplicaciones numéricas representativas . . . . .	5.34
5.8.1. Dinámica de una partícula ligada a una superficie fija .	5.35
5.8.2. Péndulo esférico compuesto . . . . .	5.41

<b>6. Aplicaciones</b>	<b>6.1</b>
6.1. Sistemas compuestos exclusivamente por sólidos rígidos . . . .	6.1
6.1.1. Peonza simétrica . . . . .	6.1
6.1.2. Péndulo compuesto . . . . .	6.4
6.1.3. Impacto de péndulo doble con paredes rígidas . . . . .	6.8
6.2. Sistemas compuestos exclusivamente por sólidos deformables .	6.9
6.2.1. Péndulo elastoplástico . . . . .	6.9
6.2.2. Viga elástica bidimensional en voladizo . . . . .	6.11
6.2.3. Impacto de viga elástica bidimensional . . . . .	6.14
6.2.4. Impacto oblicuo de una barra elástica contra una pared rígida . . . . .	6.18
6.2.5. Bloque elástico tridimensional deformable . . . . .	6.22
6.3. Sistemas compuestos por sólidos rígidos y deformables . . . .	6.24
6.3.1. Viga bidimensional con péndulo doble . . . . .	6.24
6.3.2. Impacto oblicuo de un cuerpo rígido-elástico contra una pared . . . . .	6.26
6.3.3. Bloque elástico deformable con péndulo rígido . . . . .	6.29
6.3.4. Vehículo con chasis deformable . . . . .	6.31
<b>7. Conclusiones y futuras líneas de investigación</b>	<b>7.1</b>
7.1. Resumen de la investigación desarrollada . . . . .	7.1
7.2. Conclusiones . . . . .	7.3
7.3. Principales aportaciones . . . . .	7.3
7.4. Futuras líneas de investigación . . . . .	7.4
<b>A. Sistema rígido libre. Parametrización mediante coordenadas (<math>\mathbf{x}_G, \boldsymbol{\theta}</math>)</b>	<b>A.1</b>
<b>B. Algoritmos de integración temporal</b>	<b>B.1</b>
B.1. Conceptos generales . . . . .	B.1
B.1.1. Definiciones preliminares . . . . .	B.1
B.1.2. Unicidad . . . . .	B.2
B.1.3. Convergencia . . . . .	B.3
B.1.4. Consistencia . . . . .	B.3
B.1.5. Estabilidad y concepto de sistema stiff . . . . .	B.4
B.1.6. Propiedades conservativas . . . . .	B.7
B.2. Métodos de integración . . . . .	B.9
B.2.1. Métodos multipaso lineales . . . . .	B.9
B.2.2. Métodos predictor-corrector . . . . .	B.14
B.2.3. Métodos Runge-Kutta . . . . .	B.16
B.2.4. Familia $\beta$ -Newmark . . . . .	B.19
B.2.5. Hilber-Hughes-Taylor (HHT) . . . . .	B.22
B.3. Formulación detallada de los algoritmos implementados . . . .	B.23
<b>C. Formulación discreta tridimensional de elementos finitos</b>	<b>C.1</b>
C.1. Cálculo del operador $\mathbf{B}$ de interpolación de deformaciones . .	C.1
C.2. Formulación detallada de la matriz tangente geométrica . . . .	C.4

**D. Conceptos generales sobre sistemas hamiltonianos discretos**D.1

**E. Programa de ordenador** E.1

E.1. Características generales . . . . . E.1

E.2. Estructura orientada a objetos . . . . . E.2

E.3. Resumen de instrucciones . . . . . E.3

E.4. Ejemplo de aplicación. Problema de los tres cuerpos. . . . . E.18