

# Capítulo 14

## Estática de Hilos

### 14.1. Consideraciones Generales

Se trata aquí la aplicación de los métodos de la estática al estudio de hilos o cables flexibles e inextensibles. La flexibilidad de los hilos hace que su estudio difiera en cierta medida de los sistemas discretos considerados en el resto de este curso. En efecto, uno de los objetivos principales de su estudio será determinar la configuración que adoptan, a priori desconocida. Sin embargo, resulta apropiado su estudio en el ámbito de la mecánica de sistemas rígidos ya que comparten una propiedad esencial: las fuerzas internas (las que no permiten la extensión del cable) no desarrollan ningún trabajo. En este aspecto crucial se diferencian de los sistemas deformables y estructurales, en los que se produce una energía de deformación interna bajo carga.

Las características que definen los hilos flexibles e inextensibles y se admiten aquí como hipótesis de partida son las siguientes:

1. *Sección despreciable.* Se considera que el hilo posee una dimensión predominante, mucho mayor que los otros dos, por lo que puede ser idealizado según una línea, sin sección transversal. Tan sólo será necesario considerar esta sección a efecto de calcular su peso específico o peso propio por unidad de longitud, en función de la sección transversal y su densidad.
2. *Flexibilidad perfecta.* El hilo no resiste esfuerzos de flexión, y por lo tanto tampoco de corte. Tan sólo resiste esfuerzos en dirección tangencial o longitudinal.
3. *Inextensibilidad.* Cuando está sometido a tracción, el hilo es lo suficientemente rígido (en dirección longitudinal) como para que se pueda despreciar su extensibilidad. Por el contrario, sometido a compresión, el hilo no ofrece resistencia y se arruga.

Debe quedar claro que estas hipótesis son una idealización que conforma el modelo de *hilos flexibles inextensibles* al que se ciñe este capítulo. En

circunstancias reales, los cables o cuerdas no cumplen exactamente ninguna de las hipótesis anteriores; sin embargo, en numerosos casos prácticos es suficientemente válida esta idealización.

## 14.2. Ecuaciones de equilibrio bajo cargas continuas

### 14.2.1. Ecuación vectorial del equilibrio

El hilo queda definido por su curva directriz,  $\mathbf{r}(s)$ , que supondremos parametrizada en función de la longitud de arco  $s$  de la misma. En un punto dado del hilo definido por  $s$  podremos considerar una sección normal  $A$ , en la cual definimos como *cara frontal*  $A^+$  la que está orientada en sentido de  $s$  creciente, y *cara dorsal*  $A^-$  la orientada en sentido de  $s$  decreciente (figura 14.1).

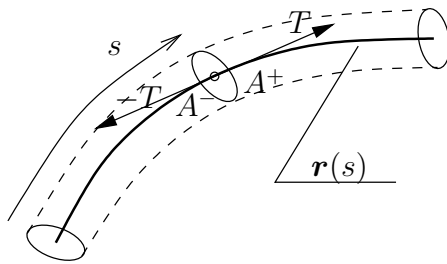


Figura 14.1: Directriz del hilo ( $\mathbf{r}(s)$ ), secciones frontal ( $A^+$ ) y dorsal ( $A^-$ ), y concepto de tensión ( $T$ )

Si se considera el hilo cortado por esta sección, la parte que queda por detrás queda limitada por la sección frontal  $A^+$ , en la que el efecto del hilo por delante que se ha eliminado puede sustituirse por una fuerza  $T$  que se denomina *tensión*. Si por el contrario se considera la parte del hilo por delante, queda limitado por la sección dorsal  $A^-$ , sobre la que el resto del hilo produce una fuerza  $-T$ , de forma que esté en equilibrio con  $T$ . En principio  $T$  podría llevar cualquier dirección, aunque como veremos más abajo su dirección será tangente al propio hilo. Por otra parte, debe ser siempre  $T > 0$  de forma que corresponda a una tracción,  $T < 0$  correspondería a un esfuerzo de compresión que no puede ser resistido.

Sea un elemento  $PQ$  del hilo, de longitud infinitesimal  $ds$ . El punto  $P$  corresponde a  $s$  y  $Q$  a  $(s + ds)$ . La sección en  $P$  será dorsal y la sección en  $Q$  frontal (figura 14.2).

Sobre el hilo actúa una carga continua  $\mathbf{q}$  por unidad de longitud. Al cortar el elemento de hilo por los puntos  $P$  y  $Q$ , el equilibrio del mismo queda garantizado por la tensión del hilo en cada extremo.

En primer lugar, establecemos el equilibrio de fuerzas sobre este elemento de hilo. Las fuerzas que actúan sobre el mismo son:

- Tensión en  $P$ :  $(-T)$

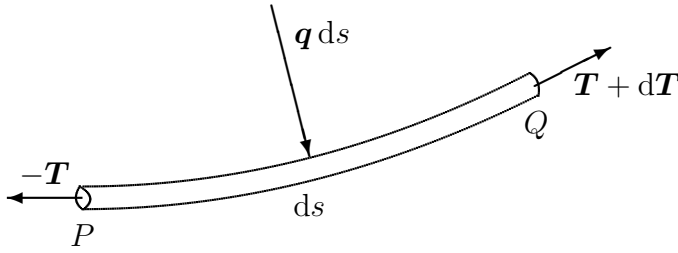


Figura 14.2: *Equilibrio de un elemento PQ de hilo sometido a cargas continuas  $\mathbf{q}$  por unidad de longitud*

- Tensión en Q:  $(\mathbf{T} + d\mathbf{T})$
- Cargas externas:  $(\mathbf{q}ds)$

Expresando la anulación de la resultante,

$$-\mathbf{T} + (\mathbf{T} + d\mathbf{T}) + \mathbf{q}ds = \mathbf{0}$$

de donde resulta la *ecuación vectorial del equilibrio*:

$$\boxed{d\mathbf{T} + \mathbf{q}ds = \mathbf{0}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{q} = \mathbf{0}} \quad (14.1)$$

Para completar las condiciones de equilibrio, expresamos la anulación de los momentos en Q. Denominando  $d\mathbf{r} = ds \mathbf{t} \simeq \overrightarrow{PQ}$ , siendo  $\mathbf{t}$  la tangente al hilo:

$$(-d\mathbf{r}) \wedge (-\mathbf{T}) - \xi d\mathbf{r} \wedge \mathbf{q}ds = \mathbf{0},$$

donde hemos supuesto que la resultante de cargas exteriores  $(\mathbf{q}ds)$  actúa en un punto intermedio del elemento, definido por  $(-\xi d\mathbf{r})$  desde Q, siendo  $\xi \in (0, 1)$ . Prescindiendo de infinitésimos de 2.º orden, resulta

$$d\mathbf{r} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

De aquí se deduce que la tensión ha de ser *tangente al hilo*, en conformidad con la hipótesis 2. enunciada en el apartado 14.1.

### 14.2.2. Ecuaciones en coordenadas intrínsecas

Expresemos ahora la ecuación del equilibrio (14.1<sup>2</sup>) en función de sus componentes en el triedro de Frenet (véase apartado 2.2.4). Recordamos que la fórmula de Frenet (2.13) permite expresar la derivada de la tangente como:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R},$$

siendo  $\mathbf{n}$  la normal principal y  $R$  el radio de curvatura.

La tensión lleva la dirección de la tangente, quedando definida por un escalar  $T$  de forma que  $\mathbf{T} = T\mathbf{t}$ . Sustituyendo en la ecuación del equilibrio (14.1<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned} \frac{d(T\mathbf{t})}{ds} + \mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \frac{dT}{ds}\mathbf{t} + T\frac{\mathbf{n}}{R} + \mathbf{q} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

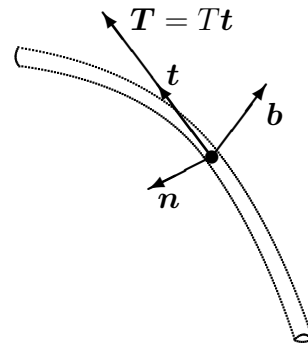


Figura 14.3: *Equilibrio en componentes intrínsecas*

Podemos extraer de esta última expresión las componentes según las direcciones del triedro. Denominando  $(q_t, q_n, q_b)$  las componentes de  $\mathbf{q}$  según cada una de las direcciones,

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} + q_t = 0 & \text{(dirección tangente)} \\ \frac{T}{R} + q_n = 0 & \text{(dirección normal)} \\ q_b = 0 & \text{(dirección binormal)} \end{cases} \quad (14.2)$$

OBSERVACIONES:

- La componente  $q_b$  según la binormal es nula. Esto quiere decir que el hilo adopta una configuración que contiene a la fuerza  $\mathbf{q}$  en su plano osculador, definido por los vectores  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ .
- Si no existe componente tangencial de la fuerza aplicada ( $q_t = 0$ ), la tensión del hilo se mantiene constante. Si además la fuerza normal ( $q_n$ ) es constante, el radio de curvatura adoptado será también constante, resultando una circunferencia como configuración de equilibrio del hilo.

EJEMPLO 14.1: Membrana cilíndrica sometida a presión interna de valor  $p$ .

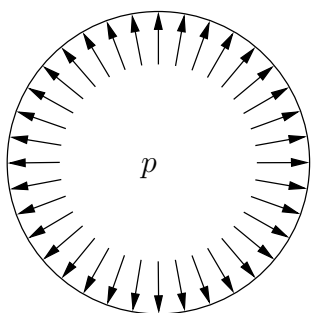


Figura 14.4: *Membrana cilíndrica sometida a presión interna  $p$*

Consideramos una rebanada de la membrana normal a la directriz del cilindro (figura 14.4), por lo que podremos considerarla como un hilo. La presión hidrostática de un fluido es normal a la superficie, por lo que la tensión es constante. Aplicando la expresión (14.2<sup>2</sup>):

$$T = pR.$$

### 14.2.3. Ecuaciones en coordenadas cartesianas

Empleamos la siguiente nomenclatura para las componentes cartesianas de los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\equiv (x, y, z) \\ \mathbf{q} &\equiv (q_x, q_y, q_z) \\ \mathbf{t} &\equiv \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \end{aligned}$$

Considerando que la tensión se puede expresar como  $\mathbf{T} = T\mathbf{t}$ , las ecuaciones de equilibrio (14.1<sup>2</sup>) resultan en las tres ecuaciones escalares

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) + q_x = 0 \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) + q_y = 0 \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) + q_z = 0 \end{cases} \quad (14.3)$$

### 14.2.4. Casos de fuerzas conservativas

Supongamos que  $\mathbf{q}$ , fuerza aplicada por unidad de longitud del hilo, se puede obtener de un potencial:

$$\mathbf{q} = -\text{grad}(V) \quad \Rightarrow \quad dV = -\mathbf{q} \cdot d\mathbf{r} \quad (14.4)$$

Puesto que  $\mathbf{q}$  es una fuerza por unidad de longitud,  $V$  tiene la dimensión de energía por unidad de longitud, es decir de fuerza.

Proyectemos la ecuación vectorial (14.1) sobre la tangente  $\mathbf{t}$ :

$$d\mathbf{T} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{q} ds \cdot \mathbf{t} = 0$$

es decir,

$$dT + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{r} = 0;$$

y empleando (14.4) se obtiene

$$dT = dV$$

e integrando

$$\boxed{T = V + h} \quad (14.5)$$

donde  $h$  es una constante de integración arbitraria.

Esta expresión es de gran utilidad práctica, puesto que permite de forma muy sencilla obtener la tensión en cada punto del hilo.

**EJEMPLO 14.2:** Hilo homogéneo sometido a su propio peso en el campo gravitatorio simplificado

Sea el peso de valor  $q$  por unidad de longitud del hilo (figura 14.5). El potencial gravitatorio es  $V = qz$ , por lo que aplicando (14.5) obtenemos la

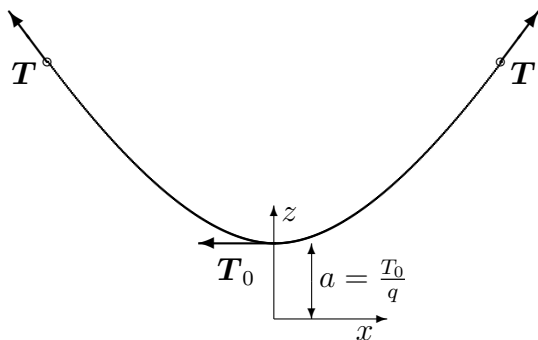


Figura 14.5: Hilo sometido a su propio peso (campo conservativo)

tensión en cada punto del hilo como

$$T = qz + h$$

En la práctica conviene elegir un origen de coordenadas de forma que se anule la constante arbitraria  $h$ . Esto se consigue situando el origen a una distancia  $a = T_0/q$  por debajo del vértice o punto más bajo de la curva de equilibrio, siendo  $T_0$  la tensión del hilo en dicho vértice. Así resulta

$$\boxed{T = qz.} \quad (14.6)$$

### 14.2.5. Casos de Fuerzas centrales o paralelas

Si el campo de fuerzas aplicadas  $\mathbf{q}$  pasa por un punto fijo, tomando el radio vector  $\mathbf{r}$  desde dicho punto, se cumplirá

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Multiplicando vectorialmente la ecuación del equilibrio (14.1) por  $\mathbf{r}$ ,

$$\mathbf{r} \wedge d\mathbf{T} + \underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{q} ds}_{=0} = \mathbf{0}$$

pero

$$\mathbf{r} \wedge d\mathbf{T} = d(\mathbf{r} \wedge \mathbf{T}) - \underbrace{d\mathbf{r} \wedge \mathbf{T}}_{=0}$$

ya que  $\mathbf{T}$  lleva la dirección de la tangente,  $\mathbf{T} = T d\mathbf{r}/ds$ . Se llega por tanto a

$$\boxed{\mathbf{r} \wedge \mathbf{T} = \text{cte.}} \quad (14.7)$$

Esta expresión indica que la curva de equilibrio será plana, puesto que  $\mathbf{r}$  es perpendicular a una dirección constante.

Supongamos ahora que el campo de fuerzas es paralelo a una dirección  $\mathbf{u}$  dada ( $\mathbf{q} = q\mathbf{u}$ ). Multiplicando vectorialmente la ecuación del equilibrio (14.1) por  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} \wedge d\mathbf{T} + \underbrace{\mathbf{u} \wedge \mathbf{q} ds}_{=0} = \mathbf{0}$$

pero

$$\mathbf{u} \wedge d\mathbf{T} = d(\mathbf{u} \wedge \mathbf{T}) - \underbrace{d\mathbf{u} \wedge \mathbf{T}}_{=0}$$

ya que  $\mathbf{u}$  es constante. Se obtiene por tanto

$$\boxed{\mathbf{u} \wedge \mathbf{T} = \text{cte.}} \quad (14.8)$$

Vemos pues que en este caso también ha de ser plana la curva por un razonamiento similar al anterior. En realidad, podríamos haber considerado este como un caso particular de fuerzas centrales, dirigidas hacia un punto impropio.

La expresión (14.8) indica además que la componente de  $\mathbf{T}$  normal a  $\mathbf{u}$  es constante; llamando a esta componente  $T_n$ ,

$$T_n = T_0 \quad (\text{cte.}) \quad (14.9)$$

Por otra parte, para evaluar la componente de  $\mathbf{T}$  según  $\mathbf{u}$ , proyectamos la ecuación del equilibrio (14.1) sobre esta dirección

$$dT_u + q ds = 0$$

de donde

$$T_u = - \int_0^s q ds + C \quad (14.10)$$

Siendo  $C$  una constante de integración.

Si elegimos el origen de arcos ( $s = 0$ ) en el punto del vértice de la curva, definido como aquél en el cual la tangente sea perpendicular a  $\mathbf{u}$  y por tanto  $T_u = 0$ , se anula la constante de integración:

$$T_u = - \int_0^s q ds$$

**EJEMPLO 14.3:** Hilo homogéneo sometido a su propio peso, bajo la acción gravitatoria simplificada

Se trata de un campo de fuerzas conservativo y paralelo. Denominamos las componentes vertical y horizontal de la tensión  $T_V$  y  $T_H$  respectivamente (figura 14.6).

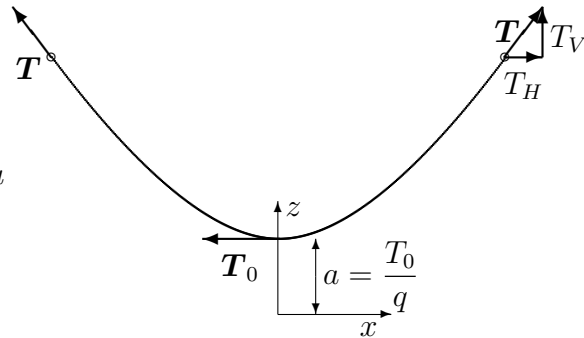


Figura 14.6: Hilo sometido a su propio peso

Si el peso del hilo por unidad de longitud es  $q$ , el campo de fuerzas será  $\mathbf{q} = -q\mathbf{k}$ , por lo que

$$dT_V = q ds \quad \Rightarrow \quad T_V = qs; \quad (14.11)$$

$$T_H = T_0 \quad (\text{cte}) \quad (14.12)$$

donde se ha elegido como origen de arcos ( $s = 0$ ) el vértice o punto más bajo de la curva, con tangente horizontal ( $T_V = 0$ ).

La tensión total es según (14.6)

$$T = qz = \sqrt{T_V^2 + T_H^2} \quad (14.13)$$

El origen de coordenadas se ha elegido a una distancia  $a$  por debajo del vértice de la curva, de forma que la tensión más baja, en el punto de tangente horizontal, vale

$$T_0 = qa \quad (14.14)$$

De las expresiones (14.11), (14.13) y (14.14) se deduce la relación

$$\boxed{z^2 = s^2 + a^2.} \quad (14.15)$$

Esta condición es una propiedad que cumple la curva de equilibrio del hilo, denominada *catenaria*. La determinación precisa de la ecuación de la catenaria se realiza más adelante (apartado 14.3.1).

### 14.2.6. Analogía dinámica

Exponemos a continuación un método alternativo, a través de una analogía, que puede emplearse para el estudio de la configuración del equilibrio de un hilo. El método consiste en asimilar la tensión  $\mathbf{T}$  a la velocidad de una partícula ficticia, cuya trayectoria dinámica será precisamente la curva de equilibrio del hilo:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$$

Para ello hemos de considerar que se ha definido un pseudo-tiempo  $t$ , que parametriza la curva de equilibrio. Derivando la velocidad respecto de este pseudo-tiempo obtenemos la “aceleración”, y por tanto la ecuación dinámica:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\mathbf{q} \cdot v$$

donde se ha empleado la ecuación (14.1<sup>2</sup>). Resulta por tanto

$$\boxed{\mathbf{a} = -v \cdot \mathbf{q}} \quad (14.16)$$

Esta ecuación define el valor de la aceleración  $\mathbf{a}$  en función de las cargas actuantes  $\mathbf{q}$ . Por tanto, podemos considerarla como la *ecuación dinámica* de esta analogía, en lugar de  $\mathbf{q} = m\mathbf{a}$ .

Si  $\mathbf{q}$  proviene de un potencial  $V$  tendremos, en función de (14.5),  $T = V + h$ , y por tanto

$$\mathbf{a} = (V + h) \mathbf{grad}(V) = -\mathbf{grad} \left[ -\frac{1}{2}(V + h)^2 \right]$$

Por lo que el potencial de este movimiento analógico es  $V^* = -\frac{1}{2}(V + h)^2$ , a partir del cual la aceleración se obtiene como

$$\mathbf{a} = -\mathbf{grad}(V^*).$$

### 14.3. Configuraciones de equilibrio de hilos

#### 14.3.1. Hilo homogéneo sometido a peso propio (Catenaria)

Se denomina *catenaria* la curva de equilibrio que adopta un hilo uniforme sometido a su propio peso. Supongamos que éste vale  $q$  por unidad de longitud, es decir  $\mathbf{q} = -q\mathbf{k}$ . Tomando el eje  $z$  como vertical y el eje  $x$  horizontal, las ecuaciones cartesianas del equilibrio (14.3) con  $F_x = 0$  y  $F_z = -q$  arrojan:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) = 0; \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) - q = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación,

$$\underbrace{T \frac{dx}{ds}}_{T_x} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_x = T_0 = \text{cte}}.$$

Aplicando la regla de la cadena a la segunda ecuación de equilibrio,

$$\frac{d}{ds} \left[ T \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds} \right] - q = 0,$$

y eliminando  $T$  en favor de  $T_0$ ,

$$\frac{d}{ds} \left( T_0 \frac{dz}{dx} \right) - q = 0.$$

Reorganizando términos y aplicando de nuevo la regla de la cadena,

$$\frac{T_0}{q} \frac{d}{dx} \left( \frac{dz}{dx} \right) \frac{dx}{ds} = 1. \quad (14.17)$$

Llamando  $a \stackrel{\text{def}}{=} T_0/q$  (*parámetro de la catenaria*) y  $z' \stackrel{\text{def}}{=} dz/dx$ , y considerando

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z')^2}},$$

la ecuación (14.17) se convierte en

$$a \frac{\frac{d}{dx} z'}{\sqrt{1 + (z')^2}} = 1$$

La primitiva de esta expresión es:  $a \operatorname{senh}^{-1}(z')$ . Integrando con la condición inicial que corresponde a situar el origen de abscisas en el vértice o punto de tangente horizontal,

$$z'|_{x=0} = 0$$

se obtiene

$$x = a \operatorname{senh}^{-1} z'$$

o bien, invirtiendo la relación

$$z' = \operatorname{senh} \frac{x}{a}.$$

Integrando de nuevo con la condición inicial  $z|_{x=0} = a$  resulta finalmente

$$\boxed{z = a \cosh \frac{x}{a}} \quad (14.18)$$

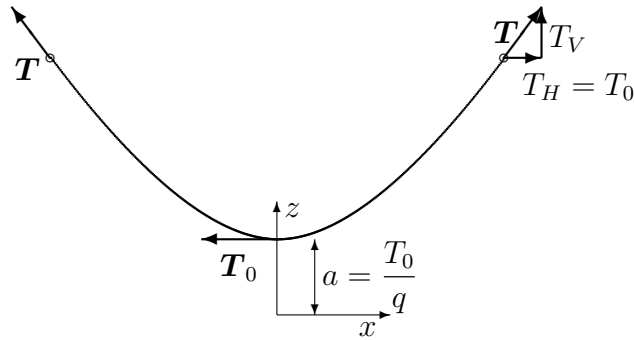


Figura 14.7: Configuración de un hilo sometido a su propio peso (catenaria)

La configuración de equilibrio puede verse en la figura 14.7. Debido a las constantes de integración tomadas, el vértice de la catenaria corresponde a las coordenadas  $(x = 0, z = a)$ .

La tensión en un punto cualquiera, según la fórmula general (14.6) para fuerzas conservativas y paralelas, es

$$\boxed{T = qa \cosh \frac{x}{a}} \quad (14.19)$$

### Longitud del arco de catenaria

Obtengamos ahora la longitud del arco de la catenaria entre dos puntos dados. Para ello, integramos el elemento infinitesimal de arco  $ds$  :

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 = dx^2 (1 + (z')^2) = dx^2 \left(1 + \operatorname{senh}^2 \frac{x}{a}\right) = dx^2 \cosh^2 \frac{x}{a}.$$

Por tanto, el arco  $s$  medido entre el vértice ( $x = 0$ ) y un punto cualquiera de abscisa  $x$  es

$$s = \int_0^x ds = \int_0^x \cosh \frac{\xi}{a} d\xi = a \operatorname{senh} \frac{x}{a}. \quad (14.20)$$

Observamos inmediatamente, aplicando la relación entre funciones hiperbólicas ( $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$ ), que

$$\boxed{s^2 = z^2 - a^2}$$

ecuación que coincide con la deducida antes (14.15).

Observemos también que, según se dedujo en (14.11) y (14.14), las componentes vertical y horizontal de la tensión son

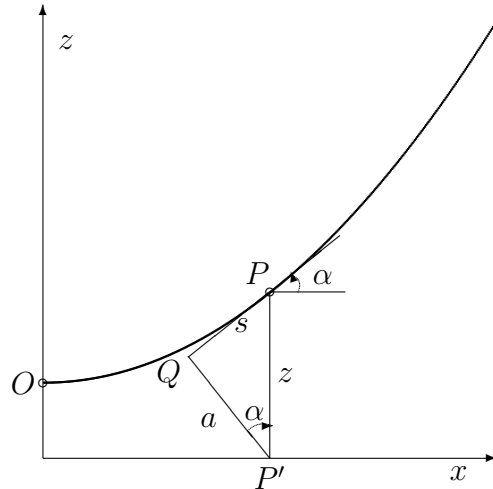
$$T_V = qs = qa \operatorname{senh} \frac{x}{a},$$

$$T_H = T_0 = qa.$$

### Segmento desde el pie de la ordenada a la tangente

Demostraremos a continuación una propiedad geométrica interesante de la catenaria que en ocasiones puede resultar útil. Sea  $P'$  el pie de la ordenada de un punto  $P$  de la catenaria (figura 14.8), es decir la proyección de  $P$  sobre el eje  $Ox$ .

Figura 14.8: *La distancia  $P'Q$  desde el pie de la ordenada a la tangente a la catenaria es constante e igual al parámetro "a" de la misma; la distancia  $PQ$  es igual al arco  $s$  entre  $P$  y  $O$  (nótese que el dibujo no está a escala, por lo que en éste ambas magnitudes no coinciden).*



Llamando  $\alpha$  al ángulo que forma la tangente a la catenaria con la horizontal,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx} = \operatorname{senh} \frac{x}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\cosh \frac{x}{a}} = \frac{a}{z}$$

considerando el triángulo rectángulo  $PQP'$  (figura 14.8), obtenemos la distancia  $P'Q$  desde el pie de la ordenada a la tangente:

$$\boxed{P'Q = z \cos \alpha = a \text{ (cte)}}$$

Por otra parte, la distancia desde el punto  $P$  de la curva al punto  $Q$  vale

$$PQ = \sqrt{z^2 - (P'Q)^2} = \sqrt{z^2 - a^2} = s$$

Es decir, es igual al arco de catenaria medido desde el vértice.

### Deducción de la ecuación de la catenaria mediante la analogía dinámica

Obtendremos ahora la ecuación de la catenaria por otro procedimiento distinto, empleando la analogía dinámica descrita en el apartado 14.2.6

La fuerza actuante por unidad de longitud para la catenaria vale  $\mathbf{q} = -q\mathbf{k}$ . La ecuación dinámica (14.16) es por lo tanto

$$\mathbf{a} = vq\mathbf{k} \quad (14.21)$$

Expresando la componente cartesiana  $x$  de esta ecuación,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = C \text{ (constante),}$$

y considerando que  $v^2 = (dx/dt)^2 + (dz/dt)^2$ , expresando la componente  $z$  de (14.21),

$$\frac{d^2z}{dt^2} = q\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = q\sqrt{C^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Integramos esta ecuación:

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{C^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = q \quad \Rightarrow \quad \sinh^{-1}\left(\frac{dz/dt}{C}\right) = qt$$

donde se ha empleado la condición inicial  $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 0$ . Invirtiendo la expresión anterior,

$$\frac{dz}{dt} = C \sinh(qt),$$

e integrando de nuevo:

$$z = \frac{C}{q} \cosh(qt)$$

donde se ha considerado la condición  $z|_{t=0} = \frac{C}{q}$ . Puesto que  $x = Ct$ , y

llamando  $a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{q}$ , se llega a

$$z = a \cosh \frac{x}{a}$$

idéntico resultado al obtenido antes (14.18) por el procedimiento directo.

### 14.3.2. Hilo sometido a carga constante por unidad de abscisa (parábola)

Un hilo sometido a carga vertical uniforme por unidad de abscisa  $x$  (coordenada horizontal) adopta una parábola como configuración de equilibrio. Como ejemplo más característico, puede citarse el de un puente colgante, en que el peso del tablero es soportado por los cables mediante péndolas (figura 14.9). El caso es distinto al del hilo sometido a peso propio (catenaria),

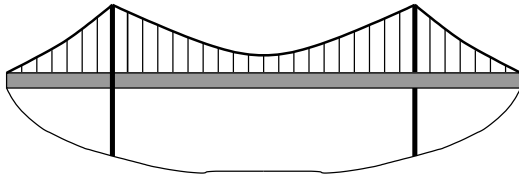


Figura 14.9: *Puente colgante: ejemplo de carga constante por unidad de abscisa.*

aunque si el cable está muy tenso ambos se aproximan bastante. En este caso la parábola podría servir como una primera aproximación a la catenaria.

Si el peso por unidad de abscisa es  $q$ , un elemento de cable de longitud  $ds$  pesará  $q(dx/ds)$ . Expresando las ecuaciones cartesianas del equilibrio (14.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) &= 0; \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) - q \frac{dx}{ds} &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se deduce que la tensión horizontal es constante:

$$T_x = T \frac{dx}{ds} = T_0 \text{ (cte.)}$$

Desarrollando la segunda ecuación y empleando este resultado,

$$\frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( T_0 \frac{dz}{dx} \right) = q \frac{dx}{ds}.$$

Simplificando las derivadas, esta expresión equivale a

$$\frac{d}{dx} \left( T_0 \frac{dz}{dx} \right) = q \quad \Rightarrow \quad T_0 \frac{d^2 z}{dx^2} = q.$$

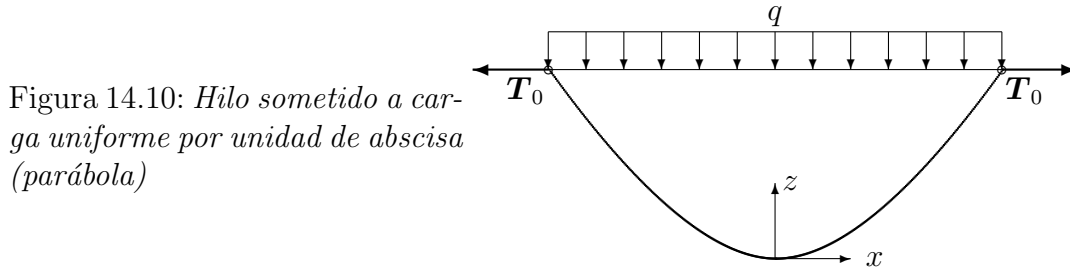
Esta última es la ecuación diferencial del equilibrio, que resulta particularmente simple para integrar. Integrando dos veces obtenemos:

$$\boxed{z = \frac{1}{2} \frac{q}{T_0} x^2.} \quad (14.22)$$

Esta ecuación corresponde a una *parábola de eje vertical*. Al integrar se han escogido los ejes para anular las constantes de integración, imponiendo

$$z|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 0,$$

es decir, el origen de los ejes está situado en el vértice de la parábola (figura 14.10), a diferencia de la catenaria (figura 14.7).



Análogamente al caso de la catenaria, la tensión horizontal es constante para todo el cable, puesto que no hay fuerzas horizontales sobre él. La tensión mínima se produce en el vértice de la parábola, donde la única componente de la tensión es la horizontal,  $T = T_x = T_0$ .

La tensión vertical vale, proyectando la ecuación (14.1) sobre la vertical,

$$dT_z + q_z ds = 0 \quad \Rightarrow \quad dT_z = q \frac{dx}{ds}$$

e integrando, considerando que para  $x = 0$  es  $T_z = 0$ ,

$$\boxed{T_z = qx}$$

Esto equivale a decir que la tensión vertical es precisamente el peso del cable entre el vértice ( $x = 0$ ) y un punto genérico de abscisa  $x$ .

La tensión total es

$$\boxed{T = \sqrt{T_0^2 + (qx)^2}} \quad (14.23)$$

siendo su valor mayor cuanto más alejados estemos del vértice.

En este caso las fuerzas no provienen del potencial gravitatorio que se deduciría del peso uniforme del cable, por lo cual la tensión total no vale  $T = qz$  como en el caso de la catenaria. Sin embargo, podemos comprobar que provienen de un potencial  $V'$  definido como

$$V' = \sqrt{T_0^2 + 2qT_0z}$$

En efecto las fuerzas se obtienen derivando  $V'$ :

$$q_z = -\frac{\partial V'}{\partial z} = \frac{-q}{\sqrt{1 + \frac{2q}{T_0}z}} = -q \frac{dx}{ds}; \quad F_x = -\frac{\partial V'}{\partial x} = 0$$

Por otra parte, empleando (14.23) y (14.22) se comprueba que resulta ser  $T = V'$ , de acuerdo con la expresión (14.5) deducida antes.

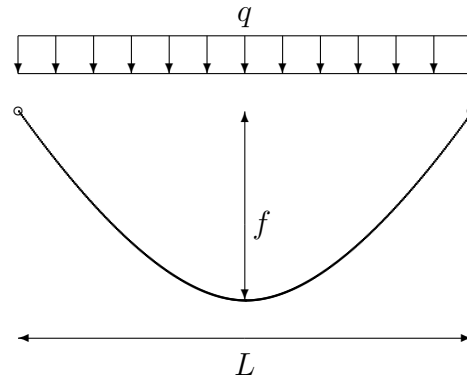


Figura 14.11: *Ejemplo: cable sometido a carga constante por unidad de abscisa*

EJEMPLO 14.4: Sea un cable sometido a una carga repartida por unidad de abscisa  $q$ , del cual conocemos su flecha  $f$  y la luz entre apoyos  $L$  a la misma altura (figura 14.11). Se desea calcular las tensiones mínimas y máximas en el cable. Solucionar de forma genérica y aplicar para los valores numéricos  $q = 1 \text{ kg/m}$ ,  $L = 200 \text{ m}$ ,  $f = 20 \text{ m}$ .

La configuración de equilibrio es una parábola, por lo que su ecuación es la (14.22):

$$z = \frac{1}{2} \frac{q}{T_0} x^2.$$

Para  $x = L/2$  es  $z = f$ , luego

$$T_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{z} x^2 = \frac{1}{8} q \frac{L^2}{f}$$

La tensión mínima es por tanto

$$T_0 = \frac{qL^2}{8f},$$

y la tensión máxima, aplicando (14.23) para  $x = L/2$ ,

$$T_{\max} = \sqrt{T_0^2 + \left(q \frac{L}{2}\right)^2}; \quad \Rightarrow \quad T_{\max} = q \frac{L}{2} \sqrt{\frac{L^2}{16f^2} + 1}$$

Aplicando los datos numéricos del enunciado, resulta

$$T_0 = 250,0 \text{ kg}; \quad T_{\max} = 269,26 \text{ kg}; \quad S = 205,2121 \text{ m}.$$

EJEMPLO 14.5: Supongamos ahora el mismo problema que en el ejemplo anterior 14.4 (cable de flecha  $f$  y luz  $L$  entre apoyos a la misma altura) pero con carga  $q$  constante por unidad de longitud del cable.

La curva de equilibrio es ahora una catenaria (14.18):

$$z = a \cosh \frac{x}{a}$$

Particularizando para la flecha  $f$  en  $x = L/2$ ,

$$(a + f) = a \cosh \frac{L}{2a}. \quad (14.24)$$

Para resolver el problema es preciso solucionar la ecuación anterior en  $a$ . Se trata de una ecuación trascendente que carece de solución analítica, debiendo resolverse por métodos numéricos<sup>1</sup> para obtener el parámetro  $a$  de la catenaria. Esto se puede realizar por diversos procedimientos: dicotomía, método de Newton, etc. (este último es el más recomendado con carácter general). Otra alternativa es aproximar la solución considerando la catenaria como una parábola, tal y como se justifica más abajo. Una vez obtenido el valor de  $a$ , los valores de la tensión se obtienen como:

$$\begin{aligned} T_0 &= qa && \text{(Tensión mínima, en el vértice)} \\ T_{\max} &= q(f + a) && \text{(Tensión máxima, en el apoyo)} \end{aligned}$$

En el caso que nos ocupa, resolviendo para los valores numéricos del enunciado (véase ejemplo 14.4), resulta:

$$T_0 = 253,2649 \text{ kg}; \quad T_{\max} = 273,2649 \text{ kg}; \quad S = 205,2374 \text{ m}.$$

### Aproximación de la catenaria por la parábola

Como se ha dicho antes, la parábola es una buena aproximación de la catenaria para hilos muy tendidos, es decir, en los que la pendiente máxima sea pequeña. Puede comprobarse esto desarrollando en serie la ecuación de la catenaria en función del argumento ( $x/a$ ):

$$z_c = a \cosh \frac{x}{a} = a \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{a} \right)^4 + \frac{1}{720} \left( \frac{x}{a} \right)^6 + \mathcal{O} \left( \frac{x}{a} \right)^8 \right].$$

El segundo término en el desarrollo anterior corresponde precisamente a la ecuación de la parábola (14.22), en la que se toma  $T_0/q = a$ . El primer término corresponde a la traslación vertical de ejes, ya que los de la catenaria se toman una distancia  $a$  por debajo del vértice.

Esta propiedad permite, siempre que el parámetro ( $x/a$ ) sea suficientemente pequeño, aproximar la catenaria por una parábola. Esta aproximación es tanto mejor cuanto más baja sea la pendiente, ya que un hilo más tenso tiene un valor mayor de  $a = T_0/q$ . De esta forma, pueden resolverse de forma aproximada con operaciones más sencillas algunos problemas de catenarias. Asimismo, esta aproximación sirve como un primer valor para comenzar las iteraciones en una resolución numérica aproximada de la ecuación de la catenaria (14.24).

<sup>1</sup>No es objeto de este curso de mecánica el estudio de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones; si se precisa, consultar algún texto de análisis numérico, como p.ej. J. Puy: *Algoritmos Numéricos en Pascal*, Servicio de Publicaciones de la E.T.S. de Ing. de Caminos de Madrid, o R.L. Burden y J.D. Faires: *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, 1985.

### Longitud de la parábola

Desarrollamos a continuación el cálculo de la longitud del hilo en el caso de la parábola. Partimos de la ecuación de la misma (14.22), en la que para simplificar sustituimos  $T_0 = qa$ , es decir:

$$z = \frac{1}{2} \frac{x^2}{a}.$$

La longitud se obtiene integrando el elemento de arco:

$$s = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + (z')^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + (x/a)^2} dx$$

Resolviendo la integral<sup>2</sup>, resulta:

$$s = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + (x/a)^2} + \frac{a}{2} \ln \left( \frac{x}{a} + \sqrt{1 + (x/a)^2} \right). \quad (14.25)$$

Este resultado representa la longitud del hilo parabólico entre el vértice ( $x = 0$ ) y un punto genérico de abscisa  $x$ . Como puede comprobarse, la expresión resulta más difícil de obtener y engorrosa de trabajar que la que correspondía a la catenaria (cf. ecuación (14.20)).

Para trabajar en la práctica, a menudo conviene desarrollar en serie la longitud de la parábola (14.25), obteniéndose:

$$s = x \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{40} \left( \frac{x}{a} \right)^4 + \frac{1}{112} \left( \frac{x}{a} \right)^6 + \mathcal{O} \left( \frac{x}{a} \right)^8 \right]. \quad (14.26)$$

En los casos usuales basta con tomar los dos primeros términos del desarrollo en serie, es decir

$$s \approx x \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]. \quad (14.27)$$

**EJEMPLO 14.6:** Obtener la longitud del hilo en una parábola de luz  $L$  y flecha  $f$  (figura 14.11).

La ecuación de la parábola (14.22), particularizada para  $x = L/2, z = f$  arroja:

$$f = \frac{1}{2} \frac{T_0}{q} (L/2)^2, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T_0}{q} = \frac{1}{8} \frac{L^2}{f}.$$

Sustituyendo en la ecuación (14.25), y teniendo en cuenta que la longitud del hilo es  $S = 2s|_{x=L/2}$ , resulta:

$$S = \frac{1}{2} L \sqrt{1 + 16(f/L)^2} + \frac{1}{8} \frac{L^2}{f} \ln \left( 4 \frac{f}{L} + \sqrt{1 + 16(f/L)^2} \right).$$

<sup>2</sup>Mediante el cambio  $t = \sinh(x/a)$  y haciendo la integral resultante por partes. La expresión final se obtiene teniendo en cuenta que  $\sinh^{-1} x/a = \ln(x/a + \sqrt{1 + (x/a)^2})$ .

Empleando el desarrollo en serie (14.26), resulta:

$$S = L \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{f}{L} \right)^2 - \frac{32}{5} \left( \frac{f}{L} \right)^4 + \frac{256}{7} \left( \frac{f}{L} \right)^6 + \mathcal{O} \left( \frac{f}{L} \right)^8 \right]$$

$$\approx L \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{f}{L} \right)^2 \right].$$

EJEMPLO 14.7: Un cable de peso  $Q$  está anclado entre dos puntos a igual altura, a una determinada distancia horizontal  $L$ , de forma que su tensión horizontal vale  $H = 10Q$ . Se desea saber la *rigidez geométrica*  $k_G$  del cable respecto al desplazamiento horizontal de un extremo, es decir, el aumento de la tensión horizontal  $H$  producida para un desplazamiento unidad, supuesto el cable inextensible<sup>3</sup>. Resolver el problema de dos formas distintas, como catenaria y empleando la aproximación de la parábola.

**Resolución como catenaria.** — En primer lugar, expresamos la ecuación del peso del cable, llamando  $x = L/2$ :

$$Q/2 = qa \operatorname{senh} \frac{x}{a} = 10Q \operatorname{senh} \frac{x}{a}.$$

Despejando en esta expresión se obtiene

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{\operatorname{senh}^{-1}(1/20)} = 20,00832744. \quad (14.28)$$

A continuación, expresamos la ecuación de la longitud del cable y la diferenciamos:

$$S = 2a \operatorname{senh} \frac{x}{a};$$

$$0 = 2da \operatorname{senh} \frac{x}{a} + a \left( \frac{adx - xda}{a^2} \right) \cosh \frac{x}{a};$$

operando extraemos  $da/dx$ :

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{(x/a) - \operatorname{tgh}(x/a)}$$

Teniendo en cuenta que  $H = qa$ ,  $x = L/2$ , obtenemos la expresión de la rigidez:

$$k_G = \frac{dH}{dL} = \frac{q da}{2 dx} = \frac{H/2a}{(x/a) - \operatorname{tgh}(x/a)}$$

Sustituyendo el valor de  $a$  calculado antes (14.28), resulta

$$k_G = 12021,99355 \frac{Q}{L}$$

<sup>3</sup>Se denomina esta razón como *rigidez geométrica*, ya que la rigidez real tendrá además una contribución adicional (*rigidez elástica*) debido a la elongación del cable bajo carga,  $k_E = EA/S$ , siendo  $E$  el módulo elástico,  $A$  la sección del cable, y  $S$  su longitud total; la rigidez conjunta se calculará mediante  $1/k = 1/k_G + 1/k_E$ .

**Resolución como parábola.**— Tomando la aproximación de la longitud de la parábola (14.27), la expresión del peso del cable, siendo  $x = L/2$ , es

$$Q/2 = qS = \frac{10Q}{a}x \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right].$$

Esta expresión resulta en una ecuación cúbica en  $a$ , de la cual despejando la única raíz real se obtiene

$$\frac{a}{x} = 20,00832640 \quad (14.29)$$

A continuación, expresamos la ecuación de la longitud del cable y la diferenciamos:

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= x \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]; \\ 0 &= dx \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right] + x \frac{1}{3} \frac{x \, da - a \, dx}{a^2}; \end{aligned}$$

operando extraemos  $da/dx$ :

$$\frac{da}{dx} = \frac{1 + (x/a)^2/2}{(x/a)^3/3}$$

Teniendo en cuenta que  $H = qa$ ,  $x = L/2$ , obtenemos la expresión de la rigidez:

$$k_G = \frac{dH}{dL} = \frac{q \, da}{2 \, dx} = \frac{H}{2a} \frac{1 + (x/a)^2/2}{(x/a)^3/3}$$

Sustituyendo el valor de  $a$  calculado antes (14.29), resulta

$$k_G = 12024,99376 \frac{Q}{L}.$$

Como puede comprobarse, resulta un valor bastante aproximado al obtenido realizando el cálculo como catenaria.

### 14.3.3. Efecto de cargas puntuales

En lo anterior se ha considerado tan sólo el efecto de cargas continuas distribuidas sobre el hilo, que dan lugar a la ecuación de equilibrio (14.1). En un caso general pueden existir también sobre el hilo cargas puntuales o concentradas aisladas, que provengan de apoyos intermedios o de cargas suspendidas.

El efecto que tienen las cargas puntuales sobre la configuración del hilo es producir una discontinuidad en la tangente. En efecto, debido a una carga puntual  $\mathbf{R}$ , planteando el equilibrio en el nudo de aplicación de la carga (figura 14.12),

$$-\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

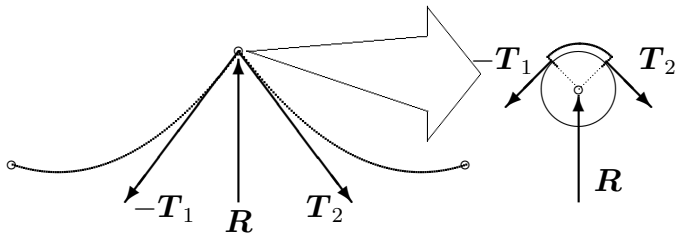


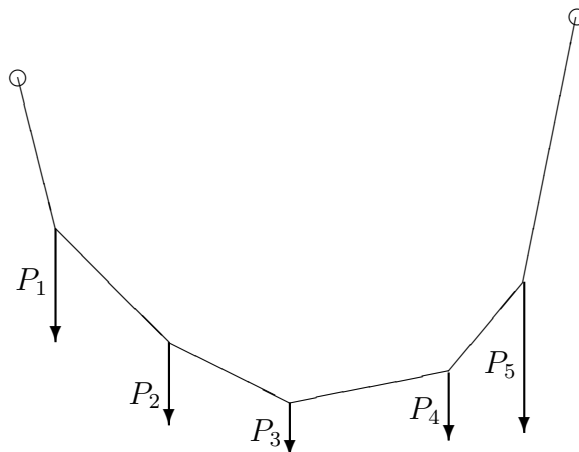
Figura 14.12: Las cargas puntuales o concentradas en un hilo flexible producen una discontinuidad en la tangente; en este caso  $\mathbf{R}$  se aplica mediante un apoyo deslizante o polea de radio muy pequeño, por lo cual se orienta como bisectriz de  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ .

Si no hay rozamiento en el punto de aplicación de la carga, no se transmiten fuerzas al hilo en dirección tangencial. La carga puntual  $\mathbf{R}$  estará en la bisectriz de las tangentes, al ser el módulo de la tensión igual a ambos lados,  $T_1 = T_2$ .

El procedimiento general de análisis para estos casos consiste en dividir el hilo en tramos entre cada dos apoyos o cargas puntuales, y solucionar cada tramo por separado, en función de las cargas distribuidas en él. Si estas cargas distribuidas son el propio peso del hilo, se formarán arcos de catenaria.

Si lo único que existen sobre el hilo son cargas puntuales y no hay cargas repartidas, el hilo se configura formando tramos rectos entre cada dos cargas. La configuración resultante se denomina *polígono funicular*.

Figura 14.13: Polígono funicular debido a cargas concentradas sobre un hilo, sin cargas repartidas; las cargas  $P_i$  se aplican en puntos fijos del hilo (no deslizantes), por lo que su dirección no es bisectriz del hilo.



#### 14.3.4. Algunos tipos de condiciones de apoyo en los extremos

Discutimos a continuación, a título de ejemplos y sin ánimo de exhaustividad, algunas condiciones de extremo y su tratamiento estático en las

ecuaciones de los hilos.

### Extremo con tensión máxima dada

Para materializar esta condición basta colocar un contrapeso  $P$  en el extremo más alto (figura 14.14), cuyo valor equivaldrá a la tensión máxima en el cable. El contrapeso cuelga de una pequeña polea lisa, que transmite la carga  $P$  al cable, sin variar el módulo, hasta la dirección de la tangente al hilo en el apoyo. Como la tensión en un cable es máxima en el punto más alto, se obtiene un cable cuya tensión máxima es constante, independientemente de las cargas intermedias que luego vaya a soportar.

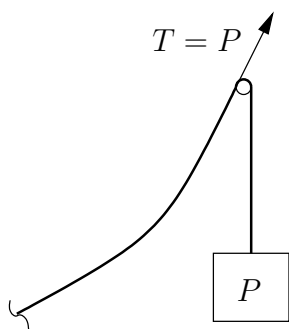


Figura 14.14: Cable sometido a carga constante  $P$  en un extremo a través de un contrapeso.

### Extremo con tensión horizontal dada

Se materializa mediante el hilo anclado a un carrito, y otro hilo auxiliar (sin peso) unido a un contrapeso  $P$  a través de una polea lisa (figura 14.15). La polea de la derecha transmite la carga  $P$  fija como tensión horizontal al carrito. El apoyo del carrito proporciona la necesaria componente de tensión vertical en el extremo del hilo.

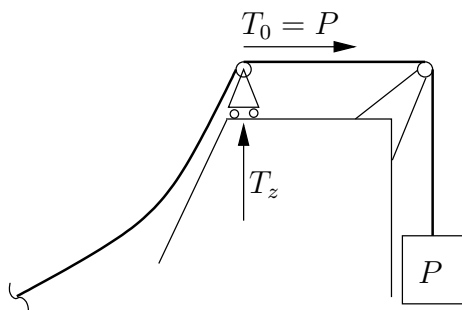


Figura 14.15: Cable sometido a tensión horizontal dada.

### Punto de anclaje con rozamiento

En el extremo apoyado sobre la recta la reacción vertical es  $T_z$  y la horizontal  $T_0$  (figura 14.16). La relación entre las componentes de la tensión es

$\mu T_z \geq T_0 = T_z / \operatorname{tg} \alpha$ , por lo cual para el equilibrio habrá de ser

$$1 / \operatorname{tg} \alpha \leq \mu = \operatorname{cotg} \varphi \Rightarrow \alpha \geq \pi/2 - \varphi.$$

En el límite estricto de equilibrio será  $1 / \operatorname{tg} \alpha = \mu$ .

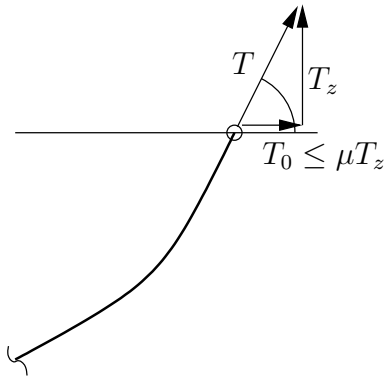


Figura 14.16: Cable anclado en una anilla que desliza en una recta horizontal con rozamiento.

### Anclaje en bloque pesado con rozamiento

Se considera aquí un extremo  $A$  anclado a un bloque pesado sobre un suelo rugoso, del cual tira hacia arriba el cable (figura 14.17). Para el equilibrio debe considerarse que la normal es  $N = mg - T_{A,z}$ , y de nuevo que el límite de la tensión horizontal es  $\mu N$ . En este caso se considera la masa del bloque como puntual y por lo tanto no se estudia el posible vuelco del mismo.

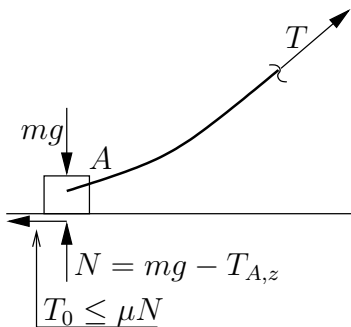


Figura 14.17: Cable anclado en bloque pesado sobre suelo rugoso.

### Carga puntual deslizante

Suponemos en este caso un cable con extremos anclados a igual altura, y una carga puntual situada en el mismo de forma que pueda deslizar libremente. Obviamente se tenderá a situar en el punto medio, de forma que se forme un ángulo entre las dos ramas de catenaria simétricas que se forman a derecha e izquierda de la carga (figura 14.18). Debe tenerse en cuenta que el punto  $A$  donde se sitúa la carga no es el vértice de esta catenaria. Por el contrario, con la convención usual de considerar el origen de abscisas bajo

el vértice de la catenaria, la abscisa de este punto es a priori una incógnita del problema ( $x_A$ ). Para relacionar ésta con los datos del problema, expresamos en forma de ecuación que cada una de las catenarias simétricas debe equilibrar la mitad de la carga vertical:

$$T_{A,z} = \frac{P}{2} = qa \operatorname{senh} \frac{x_A}{a}.$$

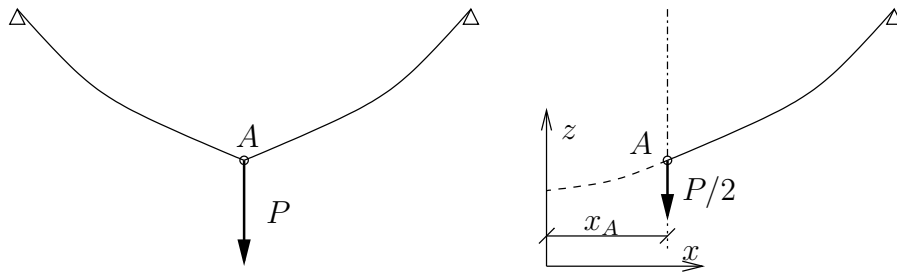


Figura 14.18: Cable con extremos anclados a igual altura y sometido a una carga puntual deslizante, que se sitúa en el medio formando dos arcos simétricos de catenaria.

### Anclaje en puntos a distinta altura

Sea un cable homogéneo, de peso unitario  $q$ , con anclajes en los puntos  $A$  y  $B$ , situados a distinta altura (figura 14.19). Se conoce el valor de la reacción horizontal en uno de los anclajes  $H$ , la luz entre ambos  $L$  y el desnivel  $h$ .

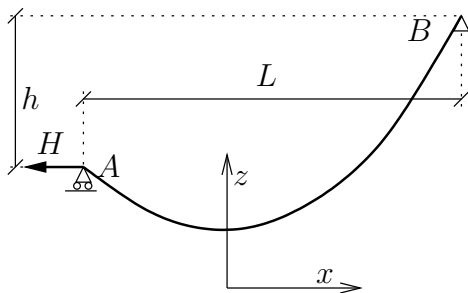


Figura 14.19: Cable anclado en apoyos a distinta altura, sometido a carga horizontal constante  $H$ .

La tensión horizontal en el hilo es constante, de valor  $T_0 = H$ , por lo que se conoce  $a = H/q$ . La incógnita es la abscisa  $x_A$  del apoyo  $A$  en relación con el vértice de la catenaria, ya que  $x_B = x_A + L$ . Se plantea por tanto la ecuación siguiente:

$$a \cosh \frac{x_A + L}{a} - a \cosh \frac{x_A}{a} = h.$$

Para resolver esta ecuación, desarrollamos el coseno hiperbólico de la suma. Denominando  $u = \cosh(x_A/L)$  (incógnita) y  $\beta = \cosh(L/a)$  (dato), resulta:

$$\beta u + \sqrt{\beta^2 - 1} \sqrt{u^2 - 1} - u = \frac{h}{a},$$

Expresión que equivale a una ecuación cuadrática de fácil resolución para  $u$ .

## 14.4. Hilos apoyados sobre superficies

### 14.4.1. Superficie lisa sin cargas

Una superficie lisa sobre la que se apoya un hilo proporciona una reacción que es normal a la superficie y al propio hilo. Puesto que las fuerzas exteriores están siempre en el plano osculador (ecuación (14.2<sub>3</sub>)), esta normal es precisamente la normal principal del hilo.

Las curvas trazadas sobre una superficie para las que la normal principal a la curva es en todo punto la normal a la superficie, son las denominadas *geodésicas*<sup>4</sup>. Por lo tanto la curva de equilibrio que adopta un hilo apoyado sobre una superficie lisa, sin otras cargas exteriores, es una geodésica de la superficie.

Por ejemplo, en una esfera las geodésicas son siempre círculos máximos. En un cilindro, las geodésicas son bien secciones rectas normales al eje, bien generatrices, o bien hélices.

#### OBSERVACIONES:

- Al no existir fuerza tangencial, de (14.2) se deduce que la tensión en el hilo es constante.
- También de (14.2) se deduce que la reacción normal sobre la superficie es  $\frac{T}{R}$ , siendo  $R$  el radio de curvatura del hilo. Nótese que ésta es la reacción por unidad de longitud del hilo.
- Se puede emplear la analogía dinámica para estudiar la curva de equilibrio, calculando para ello la trayectoria de un punto ligado a una superficie lisa, sometida a la ecuación dinámica de la analogía, (14.16).

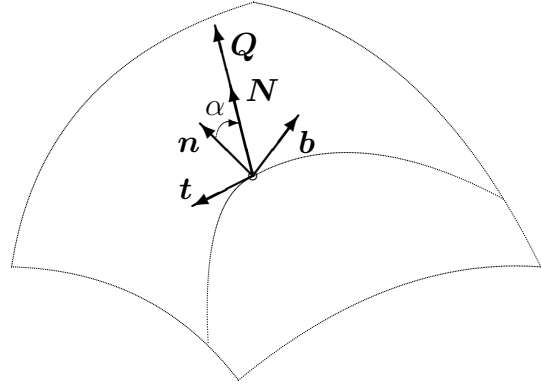
### 14.4.2. Superficie lisa con cargas

Consideremos ahora, que además de la reacción normal a la superficie, actúan unas cargas exteriores de valor  $\mathbf{q}$  por unidad de longitud del hilo.

<sup>4</sup>Ver página 2.26 de estos apuntes, o D.J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, ed. Aguilar, (apartado 2.5).

Llamemos  $\mathbf{Q}$  a la reacción normal de la superficie, que ahora no coincidirá necesariamente con la normal principal del hilo, aunque seguirá siendo normal a este (al ser normal a la superficie también es normal a cualquier curva sobre la misma).

Figura 14.20: *Hilo sobre superficie lisa con cargas exteriores  $\mathbf{F}$ : la reacción normal de la superficie  $\mathbf{N}$  no es necesariamente la normal principal al hilo.*



Denominamos  $\mathbf{n}$  a la normal principal al hilo,  $\mathbf{b}$  a la binormal, y  $\mathbf{N}$  a la normal a la superficie. Todos estos vectores son versores unitarios. Sea  $\alpha$  el ángulo que forman  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = \cos \alpha$$

La reacción vale (figura 14.20)

$$\mathbf{Q} = Q\mathbf{N}$$

y en componentes

$$\begin{cases} Q \cos \alpha, & \text{componente según } \mathbf{n} \\ Q \sin \alpha, & \text{componente según } \mathbf{b} \end{cases}$$

Escribimos las ecuaciones de equilibrio en las direcciones del triedro intrínseco (14.2)

$$\begin{aligned} 0 &= q_t + \frac{dT}{ds} \\ 0 &= q_n + Q \cos \alpha + \frac{T}{R} \\ 0 &= q_b + Q \sin \alpha \end{aligned} \tag{14.30}$$

Proyectamos éstas sobre la normal a la superficie,  $\mathbf{N}$ , multiplicando la 2.<sup>a</sup> ecuación por  $\cos \alpha$  y la 3.<sup>a</sup> por  $\sin \alpha$ :

$$\underbrace{q_n \cos \alpha + q_b \sin \alpha}_{=q_N} + Q + \frac{T}{R} \cos \alpha = 0$$

Aplicamos ahora el Teorema de Meusnier de geometría diferencial<sup>5</sup>. Este afirma que para una curva  $\Gamma$  sobre una superficie, con radio de curvatura  $R$  (de la curva), el radio de curvatura  $R_n$  de la sección normal a la superficie que es tangente a  $\Gamma$  en ese punto verifica

$$R_n \cos \alpha = R,$$

por lo que podemos escribir la ecuación anterior como

$$\boxed{q_N + Q + \frac{T}{R_n} = 0} \quad (14.31)$$

siendo  $R_n$  el radio de curvatura de la sección normal a la superficie tangente al hilo en cada punto.

EJEMPLO 14.8: Hilo homogéneo pesado, situado sobre un paralelo horizontal en una esfera lisa, en una latitud  $\alpha$  (figura 14.21).

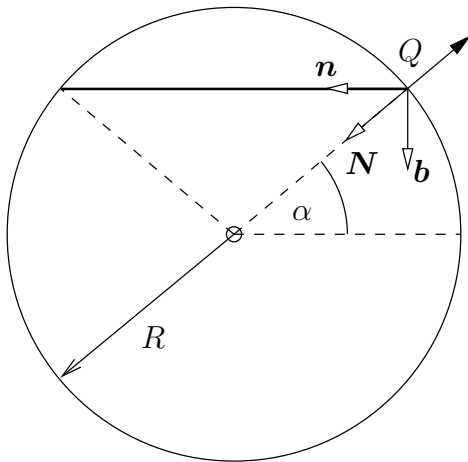


Figura 14.21: Hilo pesado situado sobre una esfera lisa, en un paralelo de latitud  $\alpha$ .

La normal principal del hilo  $\mathbf{n}$  está dirigida hacia el centro del paralelo, la normal a la superficie  $\mathbf{N}$  hacia el centro de la esfera, y la binormal  $\mathbf{b}$  es perpendicular al plano del paralelo, es decir vertical. La carga del peso distribuido es  $\mathbf{q} = q\mathbf{b}$ . Denominando  $\mathbf{Q} = -Q\mathbf{N}$  a la reacción de la esfera sobre el hilo, la ecuación de equilibrio en la dirección de  $\mathbf{b}$  (14.30<sup>3</sup>) arroja:

$$-Q \sin \alpha + q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{q}{\sin \alpha}.$$

Por otra parte, la ecuación de equilibrio en la dirección  $\mathbf{N}$  (14.31) conduce a:

$$q \sin \alpha - Q + \frac{T}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = qR \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = qR \cos \alpha \cotg \alpha.$$

<sup>5</sup>D.J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, ed. Aguilar, (apartado 2.5).

### 14.4.3. Enrollamiento sobre tambor rugoso

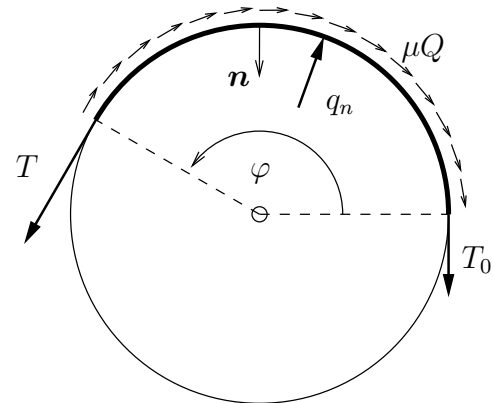
Si el hilo está apoyado sobre una superficie rugosa, se producen fuerzas tangenciales debido al rozamiento y el problema se complica considerablemente. En principio se podría tratar como el caso estudiado en el apartado anterior, considerando las fuerzas de rozamiento como cargas aplicadas  $\mathbf{q}$ . Sin embargo las fuerzas de rozamiento son por lo general desconocidas a priori, y definidas por desigualdades ( $R \leq \mu N$ ), lo cual complica aún más su tratamiento.

Un caso particular importante y que tiene solución analítica es el del enrollamiento sobre un tambor rugoso. Haremos para ello las siguientes hipótesis:

1. No existen cargas exteriores aplicadas sobre el hilo;
2. El tambor tiene una sección recta convexa (no es necesario exigir que ésta sea circular);
3. El hilo se enrolla según una sección recta del tambor.

Se desea calcular la situación límite del equilibrio, cuando al tirar de un extremo más que del otro el hilo está a punto de deslizar sobre el tambor. En esta situación límite, por ser inextensible el hilo, el rozamiento se agota simultáneamente en toda la longitud del hilo apoyada sobre el tambor. Suponemos que se está tirando desde un extremo con una tensión  $T$ , mientras que en el origen existe una tensión  $T_0$  fija. Por tanto el rozamiento se moviliza en sentido contrario a  $T$  (figura 14.22).

Figura 14.22: Hilo enrollado sobre un tambor rugoso, en el cual se tira desde  $T$ , en situación de equilibrio estricto (a punto de deslizar)



Planteamos las ecuaciones de equilibrio (14.2), denominando  $q_n$  la reacción normal del tambor (figura 14.22).

- Según la tangente:

$$\frac{dT}{ds} - \mu q_n = 0, \quad (14.32)$$

- Según la normal:

$$\frac{T}{R} - q_n = 0. \quad (14.33)$$

El signo negativo de  $q_n$  proviene de considerar sentido positivo el opuesto a la normal  $\mathbf{n}$ , es decir hacia el lado convexo del tambor.

De (14.33) obtenemos  $q_n = T/R$ , por lo que de (14.32)

$$\frac{dT}{ds} = \mu \frac{T}{R},$$

y separando variables

$$\frac{dT}{T} = \mu \frac{ds}{R} = \mu d\varphi.$$

Integramos entre dos puntos, el origen  $\varphi = 0$ , donde suponemos que la tensión vale  $T = T_0$ , y un punto genérico  $\varphi$  donde la tensión vale  $T$ :

$$\boxed{T = T_0 e^{\mu\varphi}} \quad (14.34)$$

Esta fórmula indica el aumento de la tensión producido por el rozamiento, cuando se está tirando desde un punto en  $\varphi = 0$  con tensión  $T_0$ , hasta un punto en que el hilo se ha enrollado un ángulo  $\varphi$ .