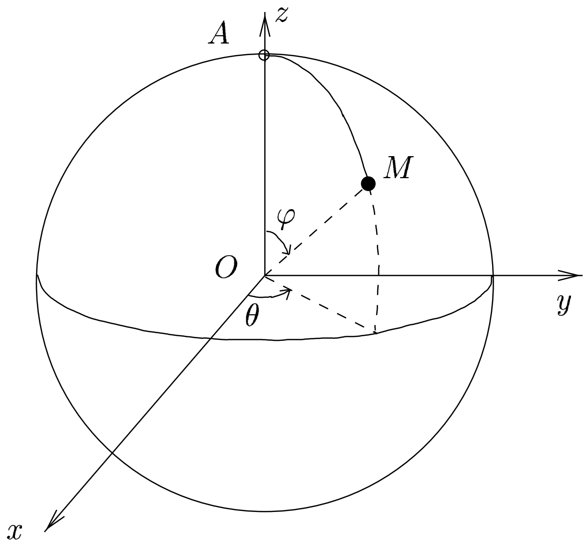
# Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS - GRUPO B (5 de noviembre de 1999)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

Un punto material $M$ de masa $m$, pesado, se mueve sin rozamiento sobre una esfera de centro $O$ y radio $R$ con ligadura bilateral. El punto $M$ está unido mediante una goma elástica de longitud natural cero y constante de rigidez $k$ al punto $A$ de la esfera ($OA$ es la vertical ascendente). La goma se apoya en todo momento sobre la cara exterior de la esfera.
Se pide:




1. Determinar la función potencial de la que derivan las fuerzas directamente aplicadas al punto.
2. Determinar las integrales primeras de donde se deduce el movimiento del punto para unas condiciones iniciales arbitrarias.
3. Determinar qué condición debe verificar $k$ y qué condiciones iniciales se necesitan para que el punto describa el paralelo correspondiente a $\varphi = 60°$.
4. En el caso particular en el que $k = mg/R$ y las condiciones iniciales sean $\varphi = 60°$ y el punto se lance con una velocidad inicial $v_0$ tangente al paralelo correspondiente, se pide:
   *a*) Justificar razonadamente si el punto inmediatamente después del instante inicial subirá o bajará.
   *b*) Calcular la reacción normal de la esfera en el instante inicial.

---

**1.-** Las fuerzas aplicadas sobre $M$ son el peso $\boldsymbol{P}$ de la partícula, la fuerza elástica desarrollada por la goma $\boldsymbol{F}$ y la reacción normal $\boldsymbol{R}$. Estas fuerzas se pueden expresar en un sistema de coordenadas esféricas del siguiente modo:

$$\boldsymbol{P} = -mg(\cos\varphi\,\boldsymbol{u}_r - \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi)$$
$$\boldsymbol{F} = -k\overline{AM}\,\boldsymbol{u}_\varphi = -kR\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi$$
$$\boldsymbol{R} = N\,\boldsymbol{u}_r$$

La función potencial asociada a la fuerza $\boldsymbol{F}$ resulta:

$$V_F = -\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int kR^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi = kR^2 \frac{\varphi^2}{2},$$

sabiendo que $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r \, \boldsymbol{u}_r + R\mathrm{d}\varphi \, \boldsymbol{u}_\varphi + R \operatorname{sen}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \boldsymbol{u}_\theta$. La función potencial que se deriva del peso $\boldsymbol{P}$ es

$$V_P = mgz = mgR\cos\varphi$$

por lo que la función potencial de la que derivan las fuerzas aplicadas al punto es:

$$V = kR^2 \frac{\varphi^2}{2} + mgR\cos\varphi$$

**2.-** Las fuerzas directamente aplicadas derivan de potencial y el trabajo de la reacción es nulo por lo que se conserva la energía. Asimismo tanto la fuerza elástica como la reacción cortan el eje vertical y el peso es paralelo al mismo. Por lo que el momento de las fuerzas con respecto a dicho eje vertical es nulo y se conserva, por tanto, el momento cinético con respecto a dicho eje. Las dos integrales primeras se expresan del siguiente modo:

$$E = T + V = \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\varphi) + kR^2 \frac{\varphi^2}{2} + mgR\cos\varphi \tag{1}$$

$$H_z = (\boldsymbol{r} \wedge m\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{k} = mR^2 \dot{\theta} \operatorname{sen}^2\varphi \tag{2}$$

**3.-** Para que la partícula describa el paralelo correspondiente a $\varphi = 60°$ la velocidad inicial debe ser tangente a dicho paralelo $\boldsymbol{v}_0 = v_0 \, \boldsymbol{u}_\theta$.

De (2) se deduce que la partícula describe el paralelo con velocidad constante

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = \frac{2v_0}{R\sqrt{3}}.$$

La aceleración de la partícula es exclusivamente centrípeta, siendo la ecuación dinámica

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} = m\frac{v_0^2}{\rho}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{u}_r - \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_\varphi\right), \tag{3}$$

donde $\rho = R\sqrt{3}/2$ es el radio de curvatura del paralelo. Las dos ecuaciones resultantes de proyectar (3) en la dirección meridional y radial son, respectivamente:

$$-kR\frac{\pi}{3} + mg\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{mv_o^2}{R\sqrt{3}} \tag{4}$$

$$N - \frac{mg}{2} = -\frac{mv_o^2}{R} \tag{5}$$

De la ecuación (3) se deduce que para un valor de $k$ dado, para que el movimiento sea posible, la velocidad inicial $v_0$ debe cumplir la relación siguiente:

$$v_0^2 = \frac{\pi R^2}{m\sqrt{3}}(k - k_{crit}) \tag{6}$$

donde $k_{crit} = mg\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi R}$, valor crítico de $k$ que equilibra estáticamente el peso, de manera que la partícula pudiese quedar en reposo en $\theta = 60°$. De esta misma ecuación se deduce que debe cumplirse $k > k_{crit}$.

**4.-** Se verifica que $k > k_{crit}$, pero la velocidad inicial no cumplirá en general la condición (6), por lo que el movimiento no se mantendrá horizontal en el paralelo. Para calcular si sube o baja hay que considerar adicionalmente en la ecuación dinámica (3) los términos de aceleración debidos a la variación de $\varphi$. Puesto que en el instante inicial es $\dot{\varphi} = 0$ (la velocidad es horizontal), el único término de aceleración a añadir es $R\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\varphi$, resultando la ecuación dinámica en dirección meridional

$$-kR\frac{\pi}{3} + mg\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{mv_o^2}{R\sqrt{3}} + mR\ddot{\varphi}. \tag{7}$$

Por tanto si $v_0^2 > \dfrac{\pi R^2}{m\sqrt{3}}(k - k_{crit})$ tenderá a bajar ($\ddot{\varphi} > 0$) y tenderá a subir ($\ddot{\varphi} < 0$) si la desigualdad tiene signo contrario.

La reacción en el instante inicial se puede deducir directamente de la ecuación (5) resultando:

$$N = \frac{mg}{2} - \frac{mv_0^2}{R}$$