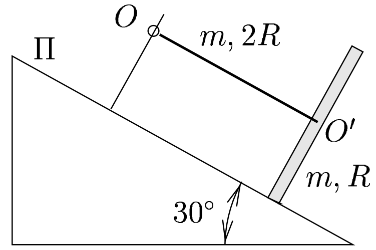
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (10 de Marzo de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

El dispositivo de la figura consta de un disco de radio R y masa m que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado (Π) un ángulo 30°. El centro O' del disco está unido mediante una articulación a un punto fijo O a través de una barra de longitud $2R$ y masa m. La posición de la barra se define mediante el ángulo θ que forma su proyección sobre el plano inclinado y una línea de máxima pendiente del mismo. La barra se mantiene en todo momento paralela al plano inclinado.

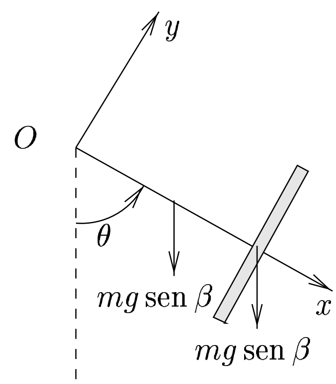


Se pide:

1. Tensor de inercia del conjunto en O.
2. Expresión del momento cinético $\boldsymbol{H}_O$ en función de θ y $\dot{\theta}$.
3. Expresión del momento de las fuerzas externas en O (se deberá considerar que la reacción del plano inclinado (Π) sobre el disco está contenida en todo momento en el plano de éste último).
4. Ecuaciones de Euler del movimiento.
5. Expresar las reacciones y la ecuación dinámica exclusivamente en función de θ y sus derivadas.
6. Justificar que el movimiento que se produce es de tipo pendular.
7. Integrales primeras del movimiento.

---

1. Se define el triedro móvil $Oxyz$ de la forma siguiente: el eje Ox coincidente con la dirección OO', el eje Oz ortogonal al plano Π hacia arriba y Oy ortogonal a los dos anteriores formando un triedro a derechas. En la figura adjunta se representa la proyección del sistema sobre el plano inclinado Π, indicando asimismo las componentes del peso, que llevan la dirección de la recta de máxima pendiente.



Las direcciones así definidas son principales de inercia de modo que el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ expresado en este triedro es diagonal, siendo los momentos principales de inercia:

$$A = \frac{1}{2}mR^2$$

$$B = C = \underbrace{\frac{1}{4}mR^2 + m(2R)^2}_{\text{disco}} + \underbrace{\frac{1}{3}m(2R)^2}_{\text{barra}} = \frac{67}{12}mR^2$$

2. La velocidad angular del dispositivo no tiene componente según y, por lo que:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{k}.$$

La condición de rodadura sin deslizamiento entre el disco y el plano impone el cumplimiento de la siguiente relación:

$$R\dot{\varphi} + 2R\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = -2\dot{\theta},$$

de modo que el momento cinético $\boldsymbol{H}_O$ resulta:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = mR^2\dot{\theta}(-\boldsymbol{i} + \frac{67}{12}\boldsymbol{k})$$

3. Sea $\beta = 30°$ el ángulo que forma el plano Π con la horizontal. Las fuerzas exteriores actuantes son el peso del disco $\boldsymbol{P}_d$, el peso de la barra $\boldsymbol{P}_b$ y la reacción del plano sobre el disco $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_d = \boldsymbol{P}_b &= mg \operatorname{sen}\beta\cos\theta\boldsymbol{i} - mg\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} - mg\cos\beta\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{R} &= R_y\boldsymbol{j} + R_z\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

donde $R_x = 0$ ya que el enunciado especifica que la reacción del plano está contenida en el plano del disco.

El momento de las fuerzas externas en O es:

$$\boldsymbol{M}_O = 2R\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{P}_d + R\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{P}_b + (2R\boldsymbol{i} - R\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{R}$$

de modo que las componentes en el triedro $Oxyz$ son las siguientes:

$$\begin{aligned} M_x &= RR_y \\ M_y &= -2RR_z + 3mgR\cos\beta \\ M_z &= 2RR_y - 3mgR\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

4. La ecuación vectorial $\dot{\boldsymbol{H}}_O = \boldsymbol{M}_O$, define las ecuaciones de Euler del movimiento de modo que:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt}\right)_{rel} + \dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_O$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt}\right)_{rel} &= mR^2\ddot{\theta}(-\boldsymbol{i} + \frac{67}{12}\boldsymbol{k}) \\ \dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_O &= -mR^2\dot{\theta}^2\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

igualando con las componentes del momento de las fuerzas en O expresadas en el apartado anterior, las ecuaciones de Euler del movimiento resultan:

$$\begin{aligned} -mR^2\ddot{\theta} &= RR_y \\ -mR^2\dot{\theta}^2 &= -2RR_z + 3mgR\cos\beta \\ mR^2\frac{67}{12}\ddot{\theta} &= 2RR_y - 3mgR\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{1}$$

5. Despejando en (1), se deduce la ecuación dinámica y las reacciones:

$$\ddot{\theta} + \frac{36g \operatorname{sen}\beta}{91R} \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$R_y = -mR\ddot{\theta}$$
$$R_z = \frac{3}{2}mg\cos\beta + \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2$$

6. Se comprueba fácilmente que la ecuación dinámica es expresable como una ecuación pendular del tipo:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \operatorname{sen}\theta = 0$$

donde

$$\omega^2 = \frac{36g \operatorname{sen}\beta}{91R}; \quad \text{para}\, \beta = 30^o,\, \omega^2 = \frac{18g}{91R}.$$

7. La integral primera del movimiento corresponde a la conservación de la energía, debido a que la reacción no produce trabajo y los pesos derivan de un potencial, por tanto:

$$E = T + V$$

Tomando como origen de potencial gravitatorio el plano horizontal que pasa por O, las expresiones resultantes son:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{91}{24}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$V = -2mgR\cos\theta \operatorname{sen}\beta - mgR\cos\theta \operatorname{sen}\beta$$

$$E = \frac{91}{24}mR^2\dot{\theta}^2 - 3mgR\cos\theta \operatorname{sen}\beta$$