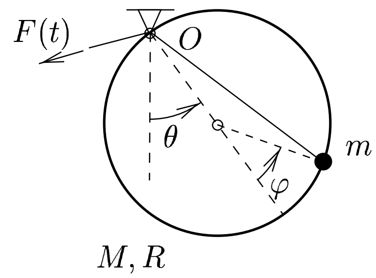
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (18 de Diciembre de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una aro de masa M y radio R se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia O fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m. Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por O a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza $F(t)$ dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema.

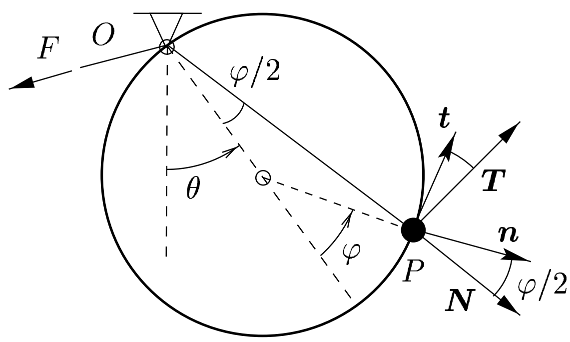


Se pide:

1. Momento cinético en O del sistema formado por el aro y la partícula.
2. Expresión del principio del momento cinético del sistema aro-partícula en O.
3. Expresión del principio de la cantidad de movimiento de la partícula.
4. Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento.
5. Expresar la reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico.

---

1. Consideramos los ejes de la figura adjunta, en donde $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$ son los versores tangente y normal respectivamente a la circunferencia en el punto P, $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N})$ son respectivamente perpendicular y paralelo a $\boldsymbol{OP}$, y $\boldsymbol{k}$ es el versor normal hacia fuera del papel.



El momento cinético respecto a O del aro y de la partícula son respectivamente:

$$\boldsymbol{H}_O^{\text{aro}} = I_O\dot{\theta}\,\boldsymbol{k} = 2MR^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{H}_O^{\text{part.}} = \boldsymbol{OP} \wedge m\boldsymbol{v}_P$$

Sabiendo que

$$\boldsymbol{v}_P = R\dot{\varphi}\,\boldsymbol{t} + 2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\theta}\,\boldsymbol{T}$$

se obtiene:

$$\boldsymbol{H}_O^{\text{part.}} = 2mR^2\cos^2\frac{\varphi}{2}(2\dot{\theta} + \dot{\varphi})\,\boldsymbol{k},$$

de modo que el momento del sistema aro-partícula resulta:

$$\boldsymbol{H}_O = [2MR^2\dot{\theta} + mR^2(1 + \cos\varphi)(2\dot{\theta} + \dot{\varphi})]\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

2. El Principio del Momento Cinético se expresa a través de la ecuación:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O,$$

siendo $\boldsymbol{M}_O$ el momento de las fuerzas,

$$\boldsymbol{M}_O = \{-MgR\operatorname{sen}\theta - mg[R\operatorname{sen}\theta + R\operatorname{sen}(\theta+\varphi)]\}\boldsymbol{k}$$

Por otra parte, derivando (1),

$$\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} = \{[2MR^2+2mR^2(1+\cos\varphi)]\ddot{\theta}+mR^2(1+\cos\varphi)\ddot{\varphi}-mR^2\operatorname{sen}(\varphi)\dot{\varphi}^2-2mR^2\operatorname{sen}(\varphi)\dot{\varphi}\dot{\theta}\}\boldsymbol{k}$$

3. La ecuación diferencial de la partícula se obtiene proyectando la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección de la tangente $\boldsymbol{t}$:

$$F_t = ma_t$$

La aceleración absoluta de la partícula expresada a través de un sistema móvil que acompaña al aro en su movimiento es:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{rel} &= R\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{t} - R\dot{\varphi}^2\,\boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{a}_{arr} &= 2R\cos\frac{\varphi}{2}\ddot{\theta}\,\boldsymbol{T} - 2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{N} \\
\boldsymbol{a}_{cor} &= 2\dot{\theta}\,\boldsymbol{k}\wedge(R\dot{\varphi})\,\boldsymbol{t} = -2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\boldsymbol{n}
\end{aligned}$$

de modo que la ecuación diferencial del movimiento resulta:

$$F\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} - mg\operatorname{sen}(\theta+\varphi) = m[R\ddot{\varphi} + R\ddot{\theta}(1+\cos\varphi) + R\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi]$$

4. No existen integrales primeras. La energía no se conserva debido a que la fuerza $F(t)$ realiza un trabajo y suministra, por tanto, energía al sistema. Asimismo el peso del aro y de la partícula ejerce un momento exterior respecto al punto O por lo que tampoco se conserva el momento cinético con respecto a dicho punto.

5. La reacción R que ejerce el aro sobre la partícula se obtiene proyectando la ecuación de la cantidad de movimiento según la dirección normal $\boldsymbol{n}$:

$$R = F\cos\frac{\varphi}{2} - mg\cos(\theta+\varphi) + m[-R\dot{\varphi}^2 + R\ddot{\theta}\operatorname{sen}\varphi - R\theta^2(1+\cos\varphi) - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}]$$