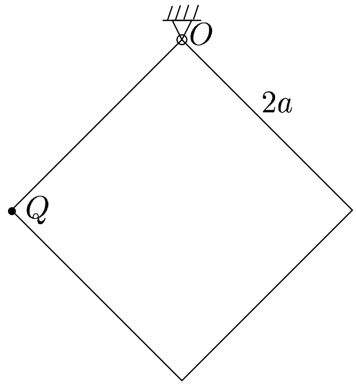
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (7 de Abril de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una placa cuadrada de masa m y lado $2a$ se halla suspendida de una esquina O, cuando se ve golpeada en otra esquina Q mediante una percusión P perpendicular a su plano.
Se pide:



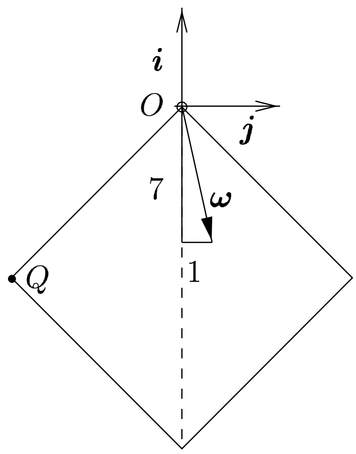
1. Determinar el eje de rotación de la placa en el instante inmediato después de la percusión, así como la velocidad de rotación que adquiere.

2. Valor de la percusión reactiva en O.

3. Particularizar para el caso en que la percusión P provenga del impacto de una partícula de masa m impactando con velocidad v normal a la placa y coeficiente de restitución e, calculando el valor de P en función de estos datos.

4. En este último caso, calcular la expresión de la energía perdida en la percusión por el conjunto placa+partícula.

1.- Tomamos las direcciones principales de inercia en O definidas por los versores $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, estando $\boldsymbol{k}$ dirigido hacia dentro del papel, de forma que la percusión sobre la placa es $\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{k}$. Los momentos principales de inercia son respectivamente $A = \frac{1}{3}ma^2$, $B = \frac{7}{3}ma^2$, y $C = \frac{8}{3}ma^2$. La velocidad de rotación que adquiere la placa queda definida por sus componentes



$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}.$$

Al ser la percusión perpendicular al plano Oxy, su momento respecto de O está contenido en el mismo plano, por lo que al ser el eje Oz principal la componente de la velocidad de rotación según esta dirección es nula ($\omega_z = 0$).

Estableciendo el balance de momento cinético,

$$\begin{aligned} A\omega_x\,\boldsymbol{i} + B\omega_y\,\boldsymbol{j} &= -a\sqrt{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) \wedge P\,\boldsymbol{k} \\ &= Pa\sqrt{2}(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}) \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\omega_x = -\frac{Pa\sqrt{2}}{A} = -3\sqrt{2}\frac{P}{ma}; \quad \omega_y = \frac{Pa\sqrt{2}}{B} = \frac{3\sqrt{2}}{7}\frac{P}{ma} \tag{1}$$

La dirección del eje de rotación forma con la dirección vertical $\boldsymbol{i}$ un ángulo

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\omega_y}{\omega_x}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{A}{B}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{7}\right)$$

El módulo de la velocidad de rotación vale

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \frac{30}{7}\frac{P}{ma}. \tag{2}$$

2.- Sea $\boldsymbol{R} = R\,\boldsymbol{k}$ la impulsión reactiva en O. El balance de cantidad de movimiento de la placa establece

$$P\,\boldsymbol{k} + R\,\boldsymbol{k} = m\boldsymbol{v}_G \tag{3}$$

La velocidad del centro de masa de la placa es

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge (-a\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}) = a\sqrt{2}\omega_y\,\boldsymbol{k} \tag{4}$$

por lo que, empleando (1) y (3) resulta

$$R = -\frac{P}{7} \tag{5}$$

3.- La velocidad del punto Q de la placa después de la impulsión es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_Q &= (\omega_x\,\boldsymbol{i} + \omega_y\,\boldsymbol{j}) \wedge \left[-a\sqrt{2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\right] \\ &= \frac{48}{7}\frac{P}{m}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Por tanto, llamando v' a la velocidad de la partícula después del choque. la ecuación del coeficiente de restitución arroja

$$-ev = v' - \frac{48}{7}\frac{P}{m}. \tag{6}$$

Por su parte, la ecuación de balance de cantidad de movimiento para la partícula es

$$-P + mv = mv' \tag{7}$$

Empleando (7) y (6), despejamos el valor de P:

$$P = \frac{7}{55}mv(1+e) \tag{8}$$

4.- La percusión reactiva $\boldsymbol{R}$ no desarrolla trabajo. La pérdida de energía proviene exclusivamente de la percusión $\boldsymbol{P}$. Aplicamos la fórmula

$$\Delta T = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{P}(1-e)$$

donde $\boldsymbol{w}_1 = -v\boldsymbol{k}$ es la velocidad relativa del punto Q de la placa respecto de la partícula, antes del choque. Empleando (8) Resulta finalmente

$$\Delta T = -\frac{1}{2}vP(1-e) = -\frac{7}{110}mv^2(1-e^2) \tag{9}$$