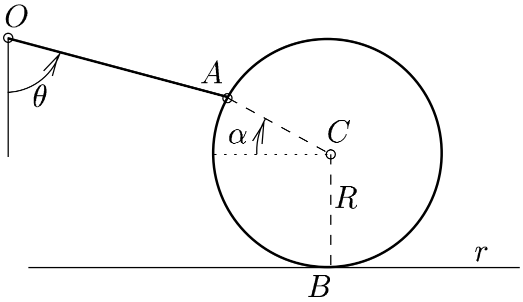
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (25 de Noviembre de 1998)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

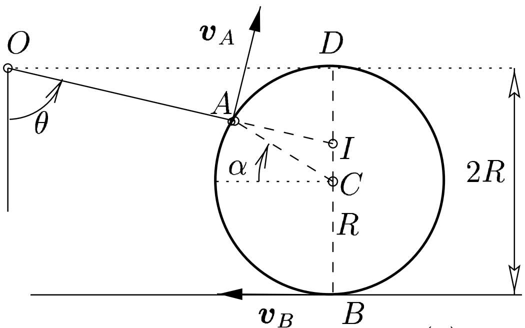
Una barra OA de longitud $2R$ se mueve girando con velocidad angular cte. $\dot{\theta} = \omega$ alrededor de uno de sus extremos O. El otro extremo A está unido mediante una articulación a un punto de la periferia de un disco de radio R, que a su vez se apoya sobre una recta fija r, sobre la cual puede deslizar manteniéndose en todo momento en contacto. La distancia entre el punto fijo O y la recta r es $2R$. Se pide:



1. Velocidad del centro C del disco y velocidad angular del mismo.
2. Situar con precisión el C.I.R del movimiento del disco.
3. Velocidad y aceleración del punto B del disco que está en contacto con la recta r.

1.- De la figura adjunta se deduce la siguiente relación geométrica entre θ y α:

$$\overline{CD} = R = 2R\cos\theta + R\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{sen}\,\alpha = 1 - 2\cos\theta. \qquad (1)$$



La forma más directa de calcular la velocidad angular es derivando la relación (1),

$$\dot{\alpha}\cos\alpha = 2\omega\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \Omega = \dot{\alpha} = 2\omega\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta (1) se puede expresar en función de θ únicamente como

$$\Omega = \omega\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos\theta(1-\cos\theta)}}. \qquad (3)$$

Alternativamente, otra forma de razonar sería considerar que el movimiento de A es simultáneamente una rotación alrededor de O fijo y una rotación instantánea alrededor de I, C.I.R. del movimiento del disco. Este punto I está situado en la intersección de las perpendiculares a dos velocidades de dirección conocida, $\boldsymbol{v}_A$ y $\boldsymbol{v}_B$; por tanto, es la intersección de la prolongación de OA con la vertical BD.

Igualando las proyecciones horizontales de $\overline{CA}$ y $\overline{IA}$ obtenemos este último segmento:

$$\overline{IA}\cdot\mathrm{sen}\,\theta = R\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \overline{IA} = R\frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\theta} \qquad (4)$$

Estableciendo $v_A = 2R\dot{\theta} = \overline{IA} \cdot \Omega$ se llega a

$$\Omega = \frac{2R}{\overline{IA}}\dot{\theta} = 2\omega\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha}, \tag{5}$$

igual resultado que (2).

La expresión vectorial de la velocidad de C es

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AC}. \tag{6}$$

Sabemos que es horizontal, por lo que basta con evaluar esta componente,

$$v_C = (v_C)_x = 2R\omega\cos\theta - \Omega R \operatorname{sen}\alpha = 2R\omega\left(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\alpha\right). \tag{7}$$

Si se desea, empleando (1) puede escribirse esta expresión en función de θ exclusivamente,

$$v_C = 2R\omega\left[\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta(1-2\cos\theta)}{2\sqrt{\cos\theta(1-\cos\theta)}}\right]. \tag{8}$$

Al igual que antes existe un procedimiento alternativo para calcular v_C, a partir del C.I.R. El segmento $\overline{IC}$ vale

$$\overline{IC} = R\left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\theta}\right), \tag{9}$$

por lo que

$$v_C = -\Omega \cdot \overline{IC} = -2\omega\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha}R\left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\theta}\right). \tag{10}$$

El resultado es el mismo que el obtenido antes en (7).

2.- El C.I.R. está sobre la vertical por el centro del disco, a una altura $\overline{IC}$ dada por (9).

3.- La expresión vectorial de la velocidad de B es

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AB}.$$

La velocidad de B es horizontal, por lo que basta con evaluar esta componente:

$$v_B = (v_B)_x = 2R\omega\cos\theta - R(1+\operatorname{sen}\alpha)\Omega = 2\omega R\left(\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha} - \operatorname{sen}\theta\operatorname{tg}\alpha\right) \tag{11}$$

la expresión vectorial de la aceleración de B es

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{AB} - \Omega^2\boldsymbol{AB}$$

Derivando (2) se obtiene

$$\dot{\Omega} = \frac{2\omega^2}{\cos^2\alpha}(\cos\theta\cos\alpha + 2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{tg}\alpha), \tag{12}$$

y operando resultan las componentes

$$(a_B)_x = -2R\omega^2\left[\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} + 2\frac{\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\right) + 2\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\alpha}\right] \tag{13}$$

$$(a_B)_y = R\left(2\omega\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha}\right)^2 \tag{14}$$