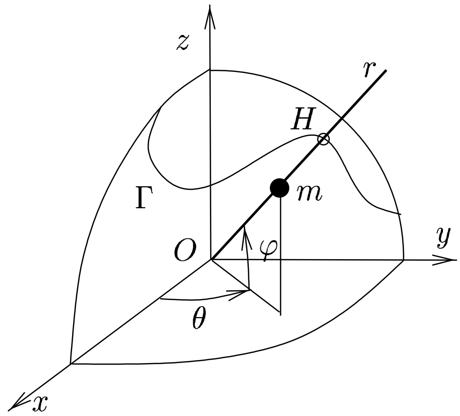
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (4 de Noviembre de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una recta r tiene un punto O fijo, que se toma como origen de referencia del triedro trirrectángulo $Oxyz$ de modo que Oz coincide con la vertical ascendente. La recta r se mueve de forma que un punto dado H de la misma recorre, con velocidad constante y de valor $a\omega$, una determinada curva Γ sobre la superficie esférica de centro O y radio a. (podrá suponerse esta curva definida, de forma genérica, por sus coordenadas esféricas $r = a$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$). A su vez, una partícula pesada de masa m se mueve sin rozamiento sobre dicha recta r.
Se pide:



1. Obtener la ecuación diferencial del movimiento de la partícula sobre la recta r.
2. Consideramos ahora el caso particular en que la curva Γ es una circunferencia situada en el plano $z = a\sqrt{3}/2$. Asimismo, en el instante inicial la partícula se encuentra situada a una distancia r_0 del origen y animada de una velocidad, respecto a la recta r, de valor $b\omega$. Determinar el movimiento, relativo a r, de la partícula (integrando la ecuación diferencial del movimiento). ¿Qué relación deben satisfacer las condiciones iniciales para que el movimiento se mantenga acotado en el transcurso del tiempo?
3. Bajo el mismo supuesto del apartado anterior y suponiendo que las condiciones iniciales satisfagan la relación pedida, obtener la reacción de la recta r sobre la partícula, especificando el valor asintótico al que tiende.

1.- La condición de que el punto H tenga velocidad $a\omega$ se expresa en las coordenadas esféricas de la figura como

$$(a\dot{\varphi})^2 + (a\dot{\theta}\cos\varphi)^2 = (a\omega)^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\cos^2\varphi = \omega^2 \tag{1}$$

El movimiento de la partícula sobre la recta r queda definido mediante la coordenada radial ρ, distancia desde O a la misma. Para obtener la ecuación diferencial basta con expresar la ecuación fundamental de la dinámica en esta dirección,

$$ma_\rho = -mg\,\mathrm{sen}\,\varphi. \tag{2}$$

La componente radial de la aceleración en coordenadas esféricas es

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\cos^2\varphi - \rho\dot{\varphi}^2; \tag{3}$$

sustituyendo (3) y (1) en (2), resulta la ecuación pedida:

$$\ddot{\rho} - \rho\omega^2 = -g\,\mathrm{sen}\,\varphi \tag{4}$$

2.- La condición $z = a\sqrt{3}/2$ equivale a $\varphi = 60°$. Particularizando en (4)

$$\ddot{\rho} - \rho\omega^2 = -g\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{5}$$

Al tratarse de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, no homogénea, su solución general se obtiene como suma de la solución general de la homogénea y una solución particular de la completa:

$$\rho(t) = \rho_h(t) + \rho_p(t). \tag{6}$$

Para la homogénea ($\ddot{\rho} - \rho\omega^2 = 0$) se tantea una solución exponencial del tipo $\rho_h(t) = \mathrm{e}^{pt}$; sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene la ecuación característica para p:

$$\mathrm{e}^{pt}(p^2 - \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \pm\omega.$$

Por tanto, la solución de la homogénea será una combinación de exponenciales reales

$$\rho_h(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}, \tag{7}$$

donde los coeficientes A y B se calcularán con las condiciones iniciales. Por otra parte, una solución particular de la completa (5) es

$$\rho_p(t) = g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2}. \tag{8}$$

Sumando (7) y (8) y particularizando para las condiciones iniciales del enunciado,

$$\begin{aligned} r_0 = \rho(0) &= A + B + g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2} \\ b\omega = \dot{\rho}(0) &= A\omega - B\omega \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$A = \frac{1}{2}\left(r_0 + b - g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2}\right); \quad B = \frac{1}{2}\left(r_0 - b - g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2}\right). \tag{9}$$

La solución queda por tanto expresada como

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{2}\left(r_0 + b - g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(r_0 - b - g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2}\right)\mathrm{e}^{-\omega t} + g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2} \\ &= \left(r_0 - g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2}\right)\cosh\omega t + b\,\mathrm{senh}\,\omega t + g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Para que se mantenga acotado el movimiento, el factor que multiplica a la exponencial creciente en (10_1) debe anularse,

$$\frac{1}{2}\left(r_0 + b - g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2} - r_0. \tag{11}$$

3.- Si se cumple la condición anterior (11) para que el movimiento permanezca acotado, sustituyendo en la ecuación del movimiento (10_1) queda

$$\rho(t) = -b\mathrm{e}^{-\omega t} + g\frac{\sqrt{3}/2}{\omega^2} \tag{12}$$

Para calcular las reacciones debemos emplear las ecuaciones fundamentales de la dinámica según las otras dos direcciones de las coordenadas esféricas:

$$ma_\theta = R_\theta; \tag{13}$$
$$ma_\varphi = -mg\cos\varphi + R_\varphi. \tag{14}$$

Las expresiones de la aceleración son

$$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta}\cos\varphi - 2\rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi + \rho\ddot{\theta}\cos\varphi, \tag{15}$$
$$a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \rho\ddot{\varphi}. \tag{16}$$

Para evaluar éstas debemos obtener antes las derivadas de las coordenadas. En primer lugar, de (12),

$$\dot{\rho} = b\omega\mathrm{e}^{-\omega t}; \quad \ddot{\rho} = -b\omega^2\mathrm{e}^{-\omega t}.$$

Por otra parte, $\varphi = 60°$, $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$; de la condición (1) resulta

$$\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = 2\omega,\ \ddot{\theta} = 0.$$

Sustituyendo estos valores en (15), (16), las expresiones de las reacciones (13) y (14) resultan

$$R_\theta = 2mb\omega^2\mathrm{e}^{-\omega t}; \tag{17}$$
$$R_\varphi = 2mg - mb\sqrt{3}\omega^2\mathrm{e}^{-\omega t} \tag{18}$$

En el límite, cuando $t \to \infty$, la exponencial negativa se anula y el valor asintótico de las reacciones será

$$\lim_{t\to\infty} R_\theta = 0; \quad \lim_{t\to\infty} R_\varphi = 2mg. \tag{19}$$