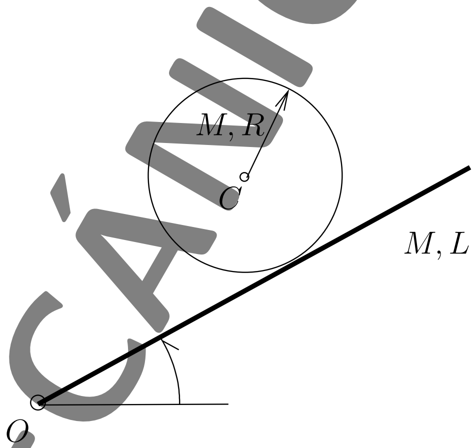
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C (17 de enero de 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

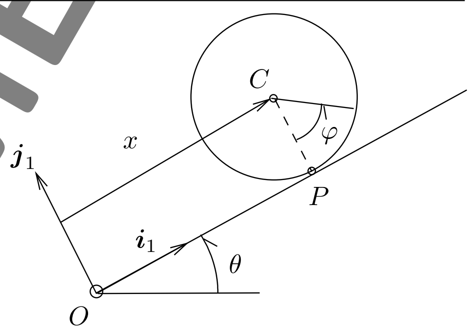
Una barra de masa M y longitud L puede girar en un plano vertical alrededor de un punto fijo O. Sobre dicha barra rueda sin deslizar un disco de radio R y masa M. Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema conjunto, definiéndolos claramente.
2. Calcular las ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y, en el caso de existir, calcularlas.



---

1. El sistema posee dos grados de libertad. La primera coordenada corresponde al ángulo θ que fija la posición de la barra respecto a una dirección horizontal fija. El disco posee, asimismo, un único grado de libertad al moverse siempre en contacto con la barra rodando sin deslizar. La coordenada adoptada es x que corresponde a la posición relativa del centro del disco C con respecto al punto fijo O en la dirección de la barra.



2. Sabiendo que $\dot{\varphi} = -\dfrac{\dot{x}}{R}$, la velocidad angular ω del disco resulta $\omega = \dot{\theta} - \dfrac{\dot{x}}{R}$. La función lagrangiana es:

$$L = T - V =$$

$$\frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M[(\dot{x} - R\dot{\theta})^2 + x^2\dot{\theta}^2] + \frac{1}{4}MR^2\left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{R}\right)^2 - Mg(x\operatorname{sen}\theta + R\cos\theta) - Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\,.$$

Las dos ecuaciones del movimiento resultan:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}M\ddot{x} - \frac{3}{2}MR\ddot{\theta} - Mx\dot{\theta}^2 + Mg\operatorname{sen}\theta = 0\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} - \frac{3}{2}MR\ddot{x} + \frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + Mx^2\ddot{\theta} + 2Mx\dot{x}\dot{\theta} + Mg(x\cos\theta - R\operatorname{sen}\theta) + Mg\frac{L}{2}\cos\theta = 0\,.$$

3. La energía se conserva, dado que todas las fuerzas activas actuantes derivan de potencial:

$$E = T + V = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M[(\dot{x} - R\dot{\theta})^2 + x^2\dot{\theta}^2] + \frac{1}{4}MR^2\left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$
$$+ Mg(x\operatorname{sen}\theta + R\cos\theta) + Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta = \text{cte.}$$

Ninguna de las coordenadas consideradas (x, θ) es cíclica.