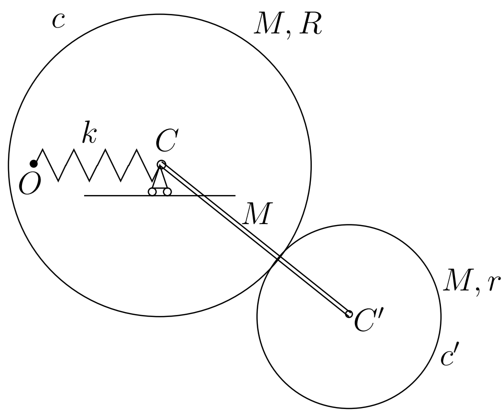
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (6 de Mayo de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Una circunferencia c de masa M y radio R tiene un movimiento de traslación de manera que su centro C se mueve sobre un recta horizontal lisa, estando C unido a un punto fijo O mediante un resorte de constante k y longitud natural nula. Otra circunferencia c' de masa M y radio r rueda sin deslizar sobre la circunferencia c, estando unidos los centros de ambas por una varilla CC' de masa igualmente M.



Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento
2. Linealización de las ecuaciones para las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable.
3. En el supuesto del apartado anterior, calcular las frecuencias propias para el caso en que $R = r$ y $k = Mg/4r$

---

1. Sean x la distancia de C al punto fijo O y θ el ángulo que forma CC' con la vertical. La energía cinética de la circunferencia de centro C es:

$$T_C = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \tag{1}$$

La energía cinética de la varilla CC' vale:

$$T_{CC'} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{(R+r)^2}{4}\dot{\theta}^2 + (R+r)\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

y la de la circunferencia de centro C':

$$T_{C'} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + (R+r)^2\dot{\theta}^2 + 2(R+r)\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}Mr^2\omega^2 \tag{3}$$

La velocidad angular ω del disco C' se obtiene imponiendo la condición de rodadura sin deslizamiento sobre el disco C. Para ello se establece que el punto de contacto de ambos discos es el CIR del movimiento del disco C' relativo al disco C:

$$\omega r = \dot{\theta}(r+R) \quad \Rightarrow \omega = \frac{r+R}{r}\dot{\theta} \tag{4}$$

Sustituyendo (4) en (3) y operando, se obtiene la energía cinética del sistema:

$$T = T_C + T_{CC'} + T_{C'} = \frac{3}{2}M\dot{x}^2 + \frac{11}{12}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}M(R+r)\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \tag{5}$$

El potencial V se obtiene considerando la energía elástica del muelle y la energía potencial del disco C' y de la varilla CC', ya que la energía potencial del disco C es constante:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - Mg\frac{R+r}{2}\cos\theta - Mg(R+r)\cos\theta \tag{6}$$

La expresión de la función Lagrangiana se obtiene a partir de (5) y (6) haciendo $L = T - V$. Derivando la función lagrangiana se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \qquad 3M\ddot{x} + \frac{3}{2}M(R+r)\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{3}{2}M(R+r)\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + kx = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{3}{2}M(R+r)\ddot{x}\cos\theta + \frac{11}{6}M(R+r)^2\ddot{\theta} + \frac{3}{2}Mg(R+r)\sin\theta = 0 \tag{8}$$

2. En la posición de equilibrio estable $x = 0$ y $\theta = 0$. Sustituyendo $\sin\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$ en (7) y (8), y despreciando los infinitésimos de orden 2 y superior se obtienen las ecuaciones diferenciales linealizadas para las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio:

$$3M\ddot{x} + \frac{3}{2}M(R+r)\ddot{\theta} + kx = 0 \tag{9}$$

$$\frac{3}{2}M(R+r)\ddot{x} + \frac{11}{6}M(R+r)^2\ddot{\theta} + \frac{3}{2}Mg(R+r)\theta = 0 \tag{10}$$

3. Sustituyendo $R = r$ y $k = \frac{Mg}{4r}$ en (9) y (10), y expresando el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3M & 3Mr \\ 3Mr & \frac{22}{3}Mr^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{Mg}{4r} & 0 \\ 0 & 3Mgr \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Las frecuencias propias ω son las raíces de la ecuación:

$$|-\omega^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}| = 0 \tag{12}$$

Operando:

$$\begin{vmatrix} -3\omega^2 M + \frac{Mg}{4r} & -3\omega^2 Mr \\ -3\omega^2 Mr & -\frac{22\omega^2 Mr^2}{3} + 3Mgr \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad 156\omega^4 - 130\frac{g}{r}\omega^2 + 9\frac{g^2}{r^2} = 0 \tag{13}$$

Finalmente, resolviendo la ecuación bicuadrática anterior se obtienen las frecuencias propias:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{156}\left(65 + \sqrt{2821}\right)\frac{g}{r} \tag{14}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{156}\left(65 - \sqrt{2821}\right)\frac{g}{r} \tag{15}$$