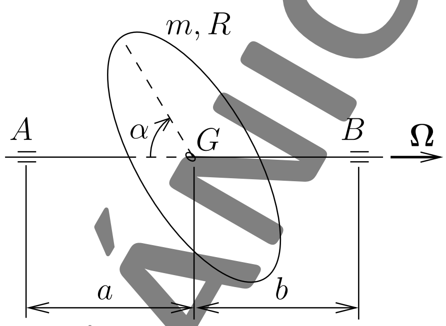
# Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (12 de marzo de 2003)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

Un disco pesado circular y homogéneo de masa $m$ y radio $R$ gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$ alrededor de un eje horizontal de masa despreciable al que está soldado y que pasa por su centro de gravedad $G$. El plano del disco forma en todo momento un ángulo $\alpha$ constante con el eje, que se encuentra apoyado en sendos cojinetes lisos $A$ y $B$ situados a distancias $a$ y $b$ de $G$ respectivamente.




Se pide:

1. Expresión del momento cinético del disco respecto de su centro $\boldsymbol{H}_G$;
2. Expresión de la derivada de $\boldsymbol{H}_G$ respecto del tiempo;
3. Expresión del momento en $G$ de las fuerzas ejercidas sobre el conjunto formado por el disco y el eje;
4. Expresiones obtenidas de la aplicación del principio de cantidad de movimiento al sistema formado por el disco y el eje;
5. Expresión de las reacciones de los cojinetes sobre el eje en un instante genérico.

---

**1.** Hacemos uso de un sistema de referencia móvil auxiliar $(G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ ligado al disco, de forma que el versor $\boldsymbol{j}$ forma en todo momento un ángulo $\alpha$ con el eje $AB$, el versor $\boldsymbol{k}$ es perpendicular al plano del disco y el $\boldsymbol{i}$ es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas. En este sistema de referencia el tensor de inercia tiene componentes constantes, y se expresa como:

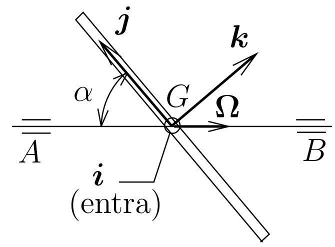



Figura 1: *Definición del sistema móvil ligado al disco.*

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \frac{1}{4}mR^2, \quad C = 2A = \frac{1}{2}mR^2 \quad ,$$

y la velocidad angular:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \cos\alpha \boldsymbol{j} + \Omega \operatorname{sen}\alpha \boldsymbol{k} \quad , \tag{1}$$

con lo que se puede calcular el momento cinético en $G$:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{4}mR^2\Omega(-\cos\alpha \boldsymbol{j} + 2\operatorname{sen}\alpha \boldsymbol{k}) \tag{2}$$

**2.** La derivada de $\boldsymbol{H}_G$ respecto del tiempo se obtiene mediante la expresión:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{H}_G \quad ,$$

donde $\dot{(\ )}$ denota la derivada temporal relativa al sistema móvil del cuerpo descrito previamente. Teniendo en cuenta que $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$ y con la ayuda de las relaciones (1) y (2) resulta:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4} mR^2\Omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \ \boldsymbol{i} \tag{3}$$

**3.** Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el conjunto del eje y el disco y que dan momento en $G$ son las dos reacciones en $A$ y $B$.

Puesto que el eje se apoya en dos cojinetes lisos, las correspondientes reacciones tienen proyección nula sobre aquél, pudiendo expresarse como:

$$\boldsymbol{R}_A = R_{A_x}\boldsymbol{i} + R_{A_V}(\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{j} + \cos\alpha\boldsymbol{k}) \tag{4}$$
$$\boldsymbol{R}_B = R_{B_x}\boldsymbol{i} + R_{B_V}(\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{j} + \cos\alpha\boldsymbol{k}) \tag{5}$$

en las que se ha denotado por $(R_{A_x}, R_{B_x})$ a las correspondientes reacciones sobre el versor $\boldsymbol{i}$ móvil, y $(R_{A_V}, R_{B_V})$ a las correspondientes componentes perpendiculares al eje $AB$ y contenidas en el plano móvil definido por los versores $(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. En general, pudiera ser necesario introducir un par externo al eje para hacer posible el movimiento descrito; sin embargo, en este caso no se precisa, puesto que se trata del movimiento de un sólido con eje fijo, y las fuerzas aplicadas (peso y reacciones en los cojinetes) no producen momento según el mismo.

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{GA} = a(\cos\alpha\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{k})$ y $\boldsymbol{GB} = b(-\cos\alpha\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{k})$, el momento cinético en $G$ se expresa como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_G &= \boldsymbol{GA} \wedge \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{GB} \wedge \boldsymbol{R}_B \\ &= (aR_{A_V} - bR_{B_V})\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\alpha(-aR_{A_x} + bR_{B_x})\boldsymbol{j} + \cos\alpha(-aR_{A_x} + bR_{B_x})\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{6}$$

Planteando el principio del momento cinético en $G$, igualando las expresiones (3) y (6), obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$-\frac{1}{4} mR^2\Omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = aR_{A_V} - bR_{B_V} \tag{7}$$
$$-aR_{A_x} + bR_{B_x} = 0 \tag{8}$$

**4.** El centro de masa del sistema es un punto fijo (suponiendo que en el instante inicial se encuentra en reposo; en caso contrario tiene un movimiento uniforme sobre el eje, lo que no altera el razonamiento siguiente), por lo que la resultante de todas las fuerzas externas (que son todas ellas perpendiculares al eje) debe ser nula.

Teniendo en cuenta que previamente hemos obtenidos las componentes de las reacciones en $A$ y $B$ respecto del triedro del cuerpo $(G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, resulta conveniente expresar el peso en este mismo sistema de referencia. Teniendo en cuenta que se trata de una fuerza vertical, sus componentes resultan:

$$\boldsymbol{P} = -mg(\operatorname{sen}\Omega t\,\boldsymbol{i} + \cos\Omega t \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{j} + \cos\Omega t\cos\alpha\ \boldsymbol{k}) \quad , \tag{9}$$

siendo $\Omega t$ el ángulo girado alrededor del eje $AB$ suponiendo que inicialmente el versor $\boldsymbol{i}$ es horizontal, y que por tanto $(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ se encuentran inicialmente en un plano vertical.

Sumando las expresiones (4), (5) y (9) e igualando a cero, se obtienen dos ecuaciones independientes más:

$$R_{A_x} + R_{B_x} - mg\operatorname{sen}\Omega t = 0 \tag{10}$$
$$R_{A_V} + R_{B_V} - mg\cos\Omega t = 0 \tag{11}$$

**5.** Con las ecuaciones (7) y (11) se pueden obtener $R_{A_V}$ y $R_{B_V}$:

$$R_{A_V} = \frac{-\frac{1}{4}mR^2\Omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + bmg\cos\Omega t}{a+b}$$
$$R_{B_V} = \frac{\frac{1}{4}mR^2\Omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + amg\cos\Omega t}{a+b}$$

y las ecuaciones (8) y (10) permiten obtener las componentes $R_{A_x}$ y $R_{B_x}$:

$$R_{A_x} = \frac{b}{a+b}mg\operatorname{sen}\Omega t \quad ; \qquad R_{B_x} = \frac{a}{a+b}mg\operatorname{sen}\Omega t$$