Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

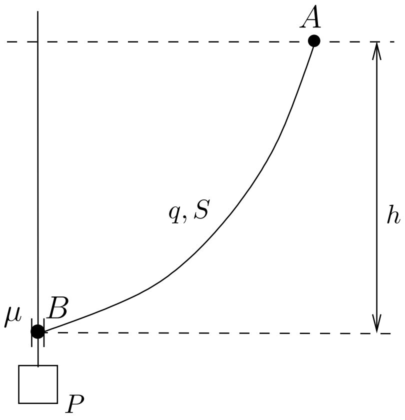
PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (17 de mayo de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un cable de peso por unidad de longitud q y longitud total S se encuentra en equilibrio de forma que uno de sus extremos (B) está obligado a moverse en una recta vertical fija que no pasa por el otro extremo A, tal y como muestra la figura adjunta.

En el punto B hay un peso P. Por otro lado, se sabe que existe un coeficiente de fricción μ entre el el mecanismo de sujección del extremo B del cable y la recta vertical.

Se tira desde el extremo A de forma que se consiga elevar el peso P, en situación de equilibrio estricto, cuando la distancia vertical entre los dos extremos del cable es h.



Se pide:

1. ecuaciones que permiten calcular las características de la figura de equilibrio del cable;
2. reducir las ecuaciones anteriores a una única expresión en función del parámetro de la catenaria (a);
3. obtener la distancia horizontal entre los dos extremos del cable para los valores numéricos $P = 10$ N, $S = 2$ m, $h = 1$ m, $q = 1$ N/m, $\mu = 0{,}5$.

---

1. Se plantea en primer lugar el equilibrio vertical del punto B con la ayuda de la Figura 1, obteniéndose la expresión:

$$qa \operatorname{senh} \frac{x_B}{a} = P + \mu qa \qquad (1)$$

Hay que observar que la fuerza de rozamiento se dirige hacia abajo, puesto que la tendencia del punto B es de ascender al tirar del extremo A.

Por otro lado, hay que considerar las expresiones que proporcionan la longitud total del cable (S) y la diferencia de cotas de los extremos (h):

$$S = a \operatorname{senh} \frac{x_A}{a} - a \operatorname{senh} \frac{x_B}{a} \qquad (2)$$

$$h = a \cosh \frac{x_A}{a} - a \cosh \frac{x_B}{a} \qquad (3)$$

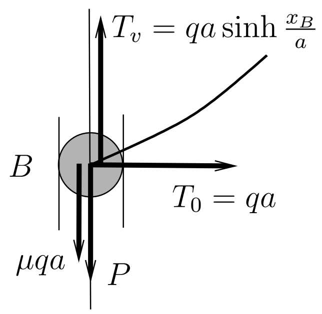


Figura 1: *Equilibrio del extremo B*

Las ecuaciones (1), (2) y (3) permiten calcular las tres incógnitas (a, x_A, x_B) con las que se puede definir completamente la configuración de equilibrio del sistema.

2. Teniendo en cuenta la relación $\cosh^2\alpha = 1 + \operatorname{senh}^2\alpha$, combinando las expresiones (1) y (2) se obtiene:

$$a \operatorname{senh}\frac{x_A}{a} = S + \frac{P}{q} + \mu a \tag{4}$$

Por otro lado, combinando las ecuaciones (1) y (3) resulta:

$$a \cosh\frac{x_A}{a} = h + \sqrt{a^2 + \left(\frac{P}{q} + \mu a\right)^2} \tag{5}$$

Restando los cuadrados de las expresiones (4) y (5) resulta una única expresión en a:

$$a^2 = \left[h + \sqrt{a^2 + \left(\frac{P}{q} + \mu a\right)^2}\right]^2 - \left[S + \frac{P}{q} + \mu a\right]^2 \tag{6}$$

Esta última expresión, llamando $\lambda = S^2/h^2$, se opera y se reduce a la relación cuadrática en a:

$$a^2\left[1 - \mu^2(\lambda - 1)\right] - a\mu(\lambda - 1)\left(S + \frac{2P}{q}\right) - (\lambda - 1)\left[\frac{P^2}{q^2} + \frac{\lambda - 1}{4} + \frac{PS}{q}\right] = 0 \tag{7}$$

3. Para los valores numéricos suministrados, la expresión (7) se reduce a:

$$\frac{1}{4}a^2 - 33a - \frac{1449}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 142{,}19 \tag{8}$$

donde se ha seleccionado la raíz positiva.

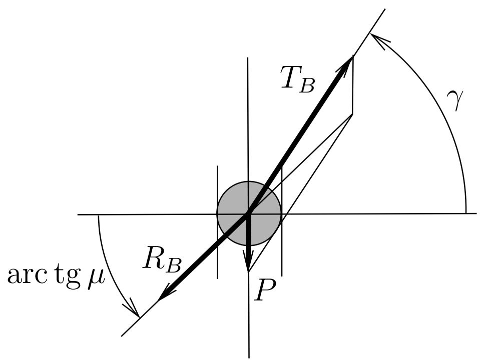
La distancia x_A se puede obtener de cualquiera de las expresiones (4) o (5), y la distancia x_B se obtiene de (1), resultando:

$$x_A = 78{,}97 \text{ m}\ , \qquad x_B = 77{,}24 \text{ m} \tag{9}$$

La distancia horizontal entre los extremos es:

$$\mathrm{d} = x_A - x_B = 1{,}73 \text{ m} \tag{10}$$

NOTA: Aunque excede las pretensiones del enunciado, es interesante observar que no todas las combinaciones de los datos de partida S, h y μ son posibles. La condición que deben cumplir estos parámetros es que la pendiente de la catenaria en B sea mayor que el coeficiente de fricción μ (para $P \neq 0$), para que la reacción R_B de la recta pueda ser equilibrada (ver Figura adjunta). En el caso límite en que el cable esté muy tenso, se verifica $\operatorname{sen}\gamma \simeq h/S$. Por tanto:



$$\tan\gamma \simeq \frac{h}{\sqrt{S^2 - h^2}} > \mu \quad \Rightarrow \quad 1 < \lambda = \frac{S^2}{h^2} < 1 + \frac{1}{\mu^2}$$

Es también curioso observar que esta última condición impone que el coeficiente que multiplica a a^2 en la ecuación (7) debe ser siempre mayor que cero, por lo que siempre va a haber que seleccionar el valor de a entre dos posibles soluciones, típicamente una positiva y otra negativa.