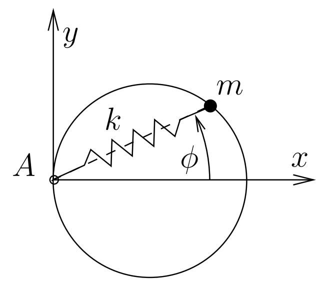
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (31 de octubre de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una partícula de masa m, pesada, se mueve sin rozamiento sobre un aro de radio R con ligadura bilateral. La partícula se encuentra atraída mediante una fuerza elástica de constante k a un punto A del aro que se encuentra en un diámetro horizontal. El aro gira con una velocidad angular constante ω en torno al eje vertical fijo Ay.

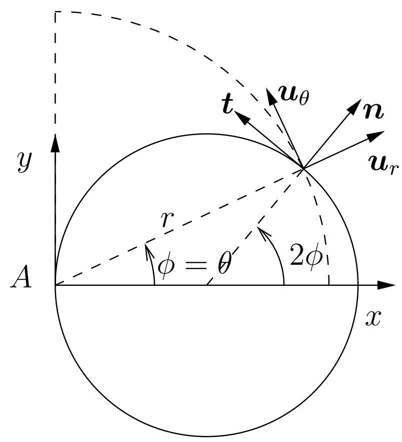


Sea ϕ el ángulo que forma el diámetro horizontal con el radio-vector que une el punto A con la partícula. Se pide:

1. Expresar la aceleración de la partícula en función del ángulo ϕ y sus derivadas.
2. Ecuación diferencial del movimiento.
3. Comprobar la existencia de una integral primera del movimiento. ¿Se conserva la energía?
4. Obtener la reacción que ejerce el aro sobre la partícula

---

1. Se considera un sistema de coordenadas esféricas con origen en A, en el que denominaremos latitud θ al ángulo ϕ. Empleando la ordenación usual de este triedro, los versores $(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{u}_\theta)$ forman triedro a derechas, por lo que $\boldsymbol{u}_\varphi$ se dirige hacia dentro del papel en la sección meridional adjunta. El valor de estas coordenadas en una posición genérica es:



$$r = 2R\cos\phi; \quad \varphi = \omega t; \quad \theta = \phi.$$

Desarrollando las expresiones de las componentes de la aceleración en esféricas (cf. apuntes), resulta:

$$a_r = -2R\ddot{\phi}\operatorname{sen}\phi - 4R\dot{\phi}^2\cos\phi - 2R\omega^2\cos^3\phi \tag{1}$$

$$a_\theta = 2R\ddot{\phi}\cos\phi - 4R\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi + 2R\omega^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi \tag{2}$$

$$a_\varphi = -8R\omega\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\phi \tag{3}$$

Con objeto de eliminar la reacción normal de la ecuación dinámica, cuestión que se pide en el siguiente apartado, interesa obtener las componentes de la aceleración según las direcciones tangencial y normal al aro (versores $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{n}$ de la figura). Teniendo en cuenta las proyecciones de éstos

$$\boldsymbol{t} = -\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{u}_r + \cos\phi\,\boldsymbol{u}_\theta; \quad \boldsymbol{n} = \cos\phi\,\boldsymbol{u}_r + \operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{u}_\theta,$$

resultan las expresiones

$$a_t = 2R\ddot{\phi} + R\omega^2(1+\cos 2\phi)\operatorname{sen} 2\phi; \tag{4}$$
$$a_n = -4R\dot{\phi}^2 - R\omega^2(1+\cos 2\phi)\cos 2\phi. \tag{5}$$

Otro procedimiento que pudiéramos haber seguido es emplear la descomposición del movimiento en el arrastre del aro más el movimiento relativo de la partícula respecto a éste. Los términos de la aceleración son

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{arr}} &= -R(1+\cos 2\phi)\omega^2\,\boldsymbol{i};\\
\boldsymbol{a}_{\text{cor}} &= 2\omega\,\boldsymbol{j}\wedge 2\dot{\phi}R\,\boldsymbol{t} = 4R\omega\dot{\phi}\operatorname{sen} 2\phi\,\boldsymbol{k};\\
\boldsymbol{a}_{\text{rel}} &= R(2\ddot{\phi})\,\boldsymbol{t} - R(2\dot{\phi})^2\,\boldsymbol{n}.
\end{aligned}$$

Se comprueba inmediatamente que las proyecciones que resultan según $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{u}_\varphi = -\boldsymbol{k}$ son idénticas a las obtenidas antes (4), (5) y (3).

2. Las fuerzas actuantes son la fuerza elástica $\boldsymbol{F}$, el peso $\boldsymbol{P}$ y la reacción normal $\boldsymbol{N}$. Sus componentes son:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -k2R\cos\phi\,\boldsymbol{u}_r = -2kR\cos\phi(\cos\phi\,\boldsymbol{n} - \operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{t})\\
\boldsymbol{P} &= -mg\,\boldsymbol{j} = -mg(\operatorname{sen} 2\phi\,\boldsymbol{n} + \cos 2\phi\,\boldsymbol{t})\\
\boldsymbol{N} &= N_n\boldsymbol{n} + N_\varphi\boldsymbol{u}_\varphi
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial del movimiento se obtiene directamente proyectando la ecuación de la cantidad de movimiento según la dirección tangente $\boldsymbol{t}$ al aro, en la que no hay componente de la reacción:

$$\boxed{-mg\cos 2\phi + kR\operatorname{sen} 2\phi = m(2R\ddot{\phi} + R\omega^2(1+\cos 2\phi)\operatorname{sen} 2\phi)} \tag{6}$$

3. La energía no se conserva al estar prescrito el movimiento del aro alrededor del eje vertical, siendo necesario realizar un trabajo para mantener la velocidad ω constante. Sin embargo, se puede comprobar que la ecuación diferencial (6) puede integrarse a falta de una constante. Efectivamente, multiplicando por $\dot{\phi}$ todos los sumandos resultan en primitivas inmediatas:

$$mR\dot{\phi}^2 - mR\omega^2\cos^4\phi + \frac{1}{2}mg\operatorname{sen} 2\phi + \frac{1}{2}kR\cos 2\phi = C. \tag{7}$$

Por otra parte, la expresión de la energía total es

$$T + V = 2mR^2\dot{\phi}^2 + 2mR^2\omega^2\cos^4\phi + mgR\operatorname{sen} 2\phi + kR^2\cos 2\phi;$$

Para establecer la comparación, multipliquemos la ecuación (7) por $2R$:

$$2mR^2\dot{\phi}^2 - 2mR^2\omega^2\cos^4\phi + mgR\operatorname{sen} 2\phi + kR^2\cos 2\phi;$$

comprobamos que ambas expresiones difieren en el signo del segundo término, por lo que si la expresión (7) es constante, la energía total $T+V$ no lo será.

4. Las componentes de la reacción se obtienen a partir de las ecuaciones dinámicas en las direcciones $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{u_\varphi}$:

$$\begin{aligned}
N_n &= mg\operatorname{sen} 2\phi + kR(1+\cos 2\phi) - m(4R\dot{\phi}^2 + R\omega^2(1+\cos 2\phi)\cos 2\phi);\\
N_\varphi &= -4mR\omega\dot{\phi}\operatorname{sen} 2\phi.
\end{aligned}$$