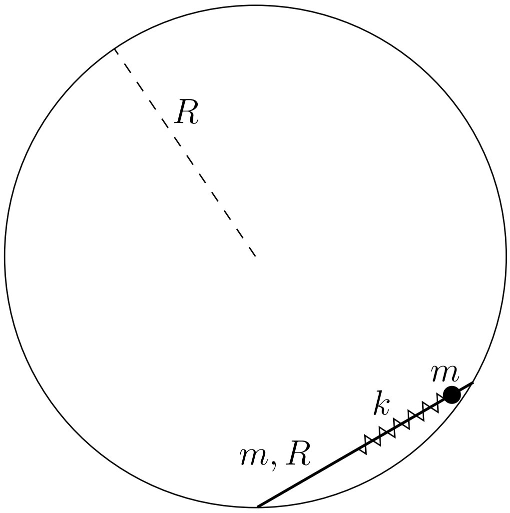
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (13 de abril de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un varilla de masa m y longitud R se mueve de manera que sus extremos deslizan en todo momento sobre un aro vertical liso y fijo, de radio R. Una masa puntual m se mueve ensartada en la varilla con ligadura bilateral lisa, estando unida al centro de la varilla mediante un resorte de constante k y longitud natural nula. Se pide:



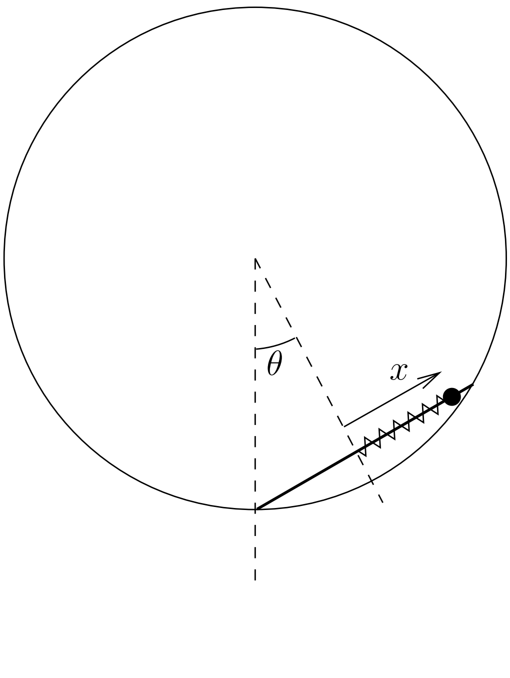
1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.

2. Linealización de las ecuaciones para las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, y valor mínimo de la constante k para que se puedan producir dichas oscilaciones pequeñas.

3. Si la constante k vale el doble del valor mínimo calculado en el apartado anterior, obtener las frecuencias propias.

---

1. El sistema mecánico definido en el enunciado tiene 2 grados de libertad. Tomamos las coordenadas generalizadas de la figura: θ para definir la posición de la varilla, y x para definir el movimiento relativo de la partícula sobre la varilla.



Las energías cinéticas de la varilla y de la masa puntual son respectivamente:

$$T_{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mR^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

$$T_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}^2x^2 + \left(\dot{\theta}\frac{\sqrt{3}}{2}R + \dot{x}\right)^2\right] \tag{2}$$

y las energías potenciales:

$$V_{\mathrm{v}} = -mgR\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \tag{3}$$

$$V_{\mathrm{m}} = mg\left(x\operatorname{sen}\theta - R\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \tag{4}$$

$$V_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5}$$

Teniendo en cuenta estos resultados, y operando, la función Lagrangiana es:

$$L = \frac{19}{24} mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 x^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\dot{x} + mgR\sqrt{3}\cos\theta - mgx\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}kx^2 \tag{6}$$

Las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{8}$$

que resultan son:

$$m\ddot{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} mR\ddot{\theta} - mx\dot{\theta}^2 + mg\operatorname{sen}\theta + kx = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} mR\ddot{x} + \frac{19}{24} mR^2\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}\dot{x} + mx^2\ddot{\theta} + mgR\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + mgx\cos\theta = 0 \tag{10}$$

2. Para linealizar las ecuaciones se hacen las sustituciones $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$ en (9) y (10), y se desprecian los infinitésimos de orden 2 y superiores:

$$m\ddot{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} mR\ddot{\theta} + kx + mg\theta = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} mR\ddot{x} + \frac{19}{24} mR^2\ddot{\theta} + mgx + mgR\sqrt{3}\theta = 0 \tag{12}$$

Expresando (11) y (12) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} m & \frac{\sqrt{3}}{2} mR \\ \frac{\sqrt{3}}{2} mR & \frac{19}{24} mR^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & mg \\ mg & \sqrt{3} mgR \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

El valor mínimo de k para que existan pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable, se obtiene a partir de la condición de que la matriz de rigidez ha de ser semidefinida positiva:

$$mgR\sqrt{3}k - m^2 g^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; k \geq \frac{\sqrt{3} mg}{3R} \tag{14}$$

3. Sustituyendo $k = 2\sqrt{3}mg/3R$ en la matriz de rigidez, y resolviendo la ecuación característica $|-\omega^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}| = 0$, se obtienen las frecuencias propias del movimiento:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}g}{3R}} \tag{15}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{5R}} \tag{16}$$

$$\tag{17}$$