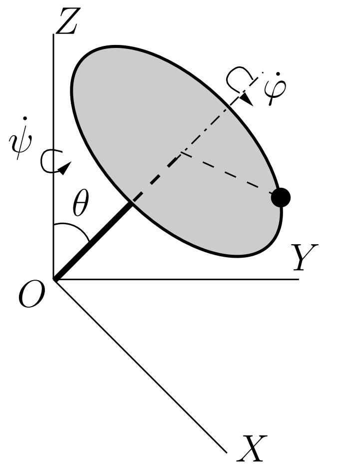
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (3 de marzo de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

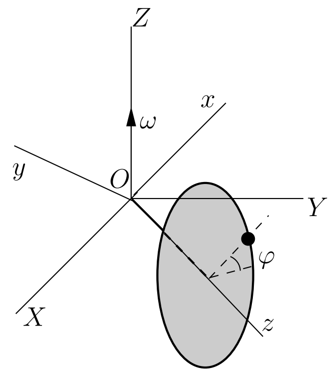
Un sólido está formado por una varilla de masa m y longitud R, perpendicular a un disco de masa m y radio R, a cuyo centro se halla soldada por un extremo. Asimismo, en el borde del disco está soldada una partícula de masa igualmente m.
El sólido se mueve de forma que el extremo O de la varilla está fijo, y ésta permanece en el plano horizontal ($\theta = \pi/2$), siendo la velocidad de precesión constante de valor $\dot{\psi}(t) = \omega$. Se pide:



1. Tensor de inercia en O
2. Expresión de la velocidad de rotación.
3. Ecuaciones de Euler del movimiento.
4. Discutir la existencia de integrales primeras.

---

1. Definimos un triedro del sólido, con origen en O, tal que Oz coincide con el eje de revolución de la peonza, y Ox lleva la dirección del radio del disco que pasa por la masa puntual m.
En estos ejes, la expresión del tensor de inercia en O es:



$$\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{31}{12}mR^2 & 0 & -mR^2 \\ 0 & \frac{43}{12}mR^2 & 0 \\ -mR^2 & 0 & \frac{3}{2}mR^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde se ha tenido en cuenta la contribución de la varilla, del disco y de la masa puntual. Para los dos primeros, los ejes considerados son direcciones principales de inercia, mientras que la masa puntual tiene momento de inercia no nulo respecto de los tres ejes y producto de inercia P_{xz} no nulo.

2. La velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{2}$$

Para expresarla en el triedro del sólido tenemos en cuenta que:

$$\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{i} + \cos\varphi \boldsymbol{j} \tag{3}$$

resultando:

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{i} + \omega \cos\varphi \boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{4}$$

3. Las ecuaciones de Euler se obtienen aplicando el teorema del momento cinético en O:

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} \tag{5}$$

La expresión del momento cinético en O es:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\Omega} = mR^2\left[\left(\frac{31}{12}\omega\operatorname{sen}\varphi - \dot{\varphi}\right)\boldsymbol{i} + \frac{43}{12}\omega\cos\varphi\boldsymbol{j} + \left(-\omega\operatorname{sen}\varphi + \frac{3}{2}\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{k}\right] \tag{6}$$

Ahora derivamos $\boldsymbol{H}_O$ respecto del tiempo, teniendo en cuenta que lo tenemos expresado en un triedro móvil:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{H}_O \tag{7}$$

siendo:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt}\right)_{\text{rel}} = mR^2\left[\left(\frac{31}{12}\omega\dot{\varphi}\cos\varphi - \ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{i} - \frac{43}{12}\omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j} + \left(-\omega\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{3}{2}\ddot{\varphi}\right)\boldsymbol{k}\right] \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{H}_O = mR^2\Bigg[&\left(-\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{25}{12}\omega\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\boldsymbol{i} + \\ &\left(\frac{13}{12}\omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \omega^2\operatorname{sen}^2\varphi - \dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{j} + \left(\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \omega\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\boldsymbol{k}\Bigg]\end{aligned} \tag{9}$$

El momento en O de las fuerzas aplicadas es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O^{\text{act}} = &\underbrace{mgR(\cos\varphi\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j})}_{\text{disco}} + \underbrace{mgR/2(\cos\varphi\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j})}_{\text{varilla}} + \\ &\underbrace{mgR(\cos\varphi\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j}) - mgR\cos\varphi\boldsymbol{k}}_{\text{masa puntual}}\end{aligned} \tag{10}$$

Asimismo, en la expresión (5) es necesario considerar los momentos reactivos que mantienen la varilla horizontal (M_θ) y que hace girar el sólido con velocidad ω constante (M_ψ):

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{reac}} = M_\psi(\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) + M_\theta(\cos\varphi\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j}) \tag{11}$$

Sustituyendo (8, 9, 10, 11) en (5), se obtienen las ecuaciones de Euler:

$$\frac{M_\psi}{mR^2}\operatorname{sen}\varphi + \frac{M_\theta}{mR^2}\cos\varphi + \frac{5}{2}\frac{g}{R}\cos\varphi = \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}\cos\varphi - \ddot{\varphi} - \omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \tag{12}$$

$$\frac{M_\psi}{mR^2}\cos\varphi - \frac{M_\theta}{mR^2}\operatorname{sen}\varphi - \frac{5}{2}\frac{g}{R}\operatorname{sen}\varphi = -\frac{5}{2}\omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \omega^2\operatorname{sen}^2\varphi - \dot{\varphi}^2 \tag{13}$$

$$-\frac{g}{R}\cos\varphi = \frac{3}{2}\ddot{\varphi} + \omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \tag{14}$$

4. No existen integrales primeras. Debido al movimiento impuesto con ω constante no se conserva la energía mecánica del sistema ni la proyección del momento cinético sobre el eje vertical. Asimismo, por no ser un sólido de revolución tampoco se conserva la proyección del momento cinético sobre el eje móvil Oz.