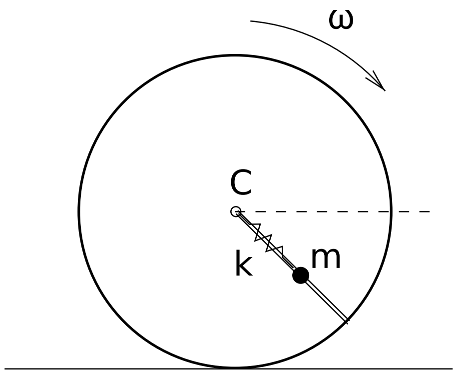
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE B5 (10 de Febrero de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*



Un disco de radio R y masa M se mueve en todo momento en un plano vertical fijo, rodando sin deslizar sobre una recta horizontal fija.
En el disco existe una ranura radial lisa en la que se mueve una partícula de masa m, que está unida además al centro (C) del disco mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural nula. Se supone que a lo largo del movimiento la partícula no abandona la ranura.

Se pide, empleando el formalismo de la mecánica Lagrangiana:

1. Obtener el par que hay que ejercer sobre el disco para mantener una velocidad de giro constante (ω) en función de el(los) grado(s) de libertad del sistema y su(s) derivadas.
2. Para el mismo caso de $\omega = cte$, obtener la ecuación del movimiento de la partícula en la ranura.

⋆

1. El sistema tiene un grado de libertad, asociado al movimiento de la partícula en la ranura. Para obtener el par pedido liberamos el giro del disco θ, de manera que el par necesario pasa a ser una fuerza aplicada. Llamando r a la distancia de la partícula al centro del disco y θ al ángulo que forma la ranura con la horizontal, la Lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} L = T - V &= T_{disco} + T_{particula} - V_{muelle} - V_{peso} \\ &= \frac{3}{4}MR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot r^2 + (R^2+r^2)\dot\theta^2 + 2R\dot\theta\left(\dot r\cos\theta - r\dot\theta\operatorname{sen}\theta\right)\right] - \frac{1}{2}kr^2 + mgr\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

y con la ecuación de Lagrange en θ, particularizada para $\theta = \omega t, \dot\theta = \omega, \ddot\theta = 0$ (suponiendo que en el instante inicial la ranura se encuentra horizontal) se obtiene el momento necesario M_θ:

$$2m\omega r\dot r + mR\ddot r\cos\omega t - 2mR\omega\dot r\operatorname{sen}\omega t - mRr\omega^2\cos\omega t - mgr\cos\omega t = M_\theta$$

2. La ecuación de Lagrange en r, particularizada con $\theta = \omega t, \dot\theta = \omega, \ddot\theta = 0$ proporciona la ecuación del movimiento de la partícula en la ranura:

$$m\ddot r + (k - m\omega^2)r = mg\operatorname{sen}\omega t$$