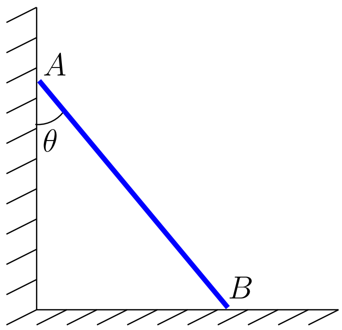
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (13 de enero de 2011)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una varilla pesada de masa m y longitud $2b$, obligada a moverse en un plano vertical fijo, se apoya por sus extremos A y B en dos rectas lisas y fijas, una vertical y otra horizontal, respectivamente. En el instante inicial la varilla forma un ángulo $\theta_0 = 30°$ con la recta vertical y se encuentra en reposo. Determinar el ángulo θ que forma la varilla con la recta vertical en el instante en que se despega de la misma, así como su velocidad angular y la velocidad de su centro de masas.



Tomando como sistema de referencia los ejes correspondientes a las rectas sobre las que se apoya la varilla, la posición, velocidad y aceleración del centro de masas de la varilla son:

$$x_G = b \operatorname{sen}\theta \qquad \dot{x}_G = b\dot{\theta}\cos\theta \qquad \ddot{x}_G = b(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta) \tag{1}$$

$$y_G = b\cos\theta \qquad \dot{y}_G = -b\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \qquad \ddot{y}_G = -b(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \tag{2}$$

Llamando X e Y a las reacciones en A y B respectivamente, las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento y del momento cinético en G son:

$$X = mb(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta) \tag{3}$$

$$Y - mg = -mb(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \tag{4}$$

$$Yb\operatorname{sen}\theta - Xb\cos\theta = \frac{1}{3}mb^2\ddot{\theta} \tag{5}$$

Imponiendo en (3) y (5) la condición de despegue ($X = 0$), y operando:

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2\tan\theta \tag{6}$$

$$Y = \frac{1}{3}mb\frac{\dot{\theta}^2}{\cos\theta} \tag{7}$$

Sustituyendo (6) y (7) en (4), resulta:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g\cos\theta}{4b} \tag{8}$$

Expresemos ahora la conservación de la energía entre la posicion inicial y la posición en la que se despega la varilla:

$$mgb\frac{\sqrt{3}}{2} = mgb\cos\theta + \frac{2}{3}mb^2\dot{\theta}^2 \tag{9}$$

Y sustituyendo (8) en (9) se obtiene la posición θ en la que se despega la varilla:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{10}$$

La velocidad angular de la varilla se obtiene a partir de (8):

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{b}} \tag{11}$$

y la velocidad del centro de masas resulta:

$$v_G = b\dot{\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}gb} \tag{12}$$