

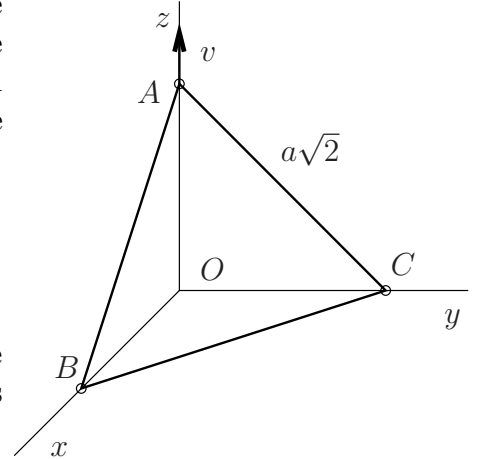
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE B3 (18 de Noviembre de 2010)

Apellidos	Nombre	Nº	Grupo

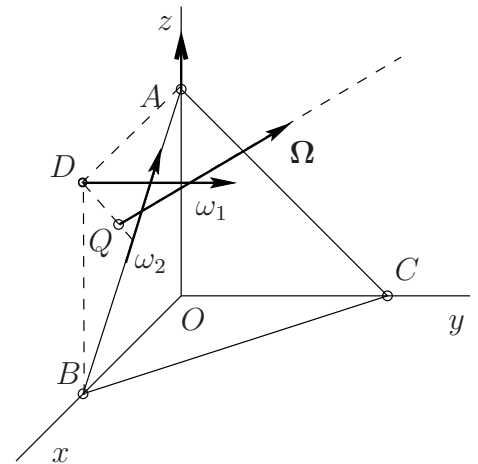
Un triángulo equilátero rígido ABC evoluciona de forma que el vértice A se mueve sobre el eje Oz con velocidad v ; B se mueve sobre Ox ; y C está obligado a permanecer sobre el plano Oxy . En el instante en que C está sobre el eje Oy , se pide:

1. Velocidad del punto C ;
2. Velocidad angular del sólido;
3. Punto en el que el eje del movimiento helicoidal tangente corta al plano Oxz y velocidad de deslizamiento de los puntos del mismo.



Teniendo en cuenta que el movimiento del lado AB es plano con centro instantáneo de rotación en D , podemos interpretar el movimiento como composición de dos rotaciones:

1. $\omega_1 \mathbf{j}$ por el punto D , que proporciona el movimiento plano de AB ; el punto D se halla en la intersección de las perpendiculares a las velocidades de A y de B , es decir $\mathbf{OD} \equiv (a, 0, a)$.
2. ω_2 alrededor de BA , cuyo valor se calculará de forma que se cumpla la condición de que el punto C se mueva dentro del plano Oxy .



Su composición, al ser rotaciones aplicadas en ejes que no se cortan, dará lugar a un movimiento helicoidal general con velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ y deslizamiento en el eje.

1.- Analizando el movimiento de AB en el plano Oxz , con C.I.R. en D , se deduce que $v_B = v_A = v$ (en el instante que dice el enunciado) y $\omega_1 = v/a$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $\mathbf{BA} = (-a, 0, a)$, el vector velocidad de rotación alrededor de este lado es

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$

En función de ω_1 y ω_2 la velocidad del punto C es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \mathbf{DC} + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \mathbf{BC} \\ &= \omega_1 a(-\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \omega_2 \frac{a}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (1)$$

Imponiendo en esta última expresión que la componente z sea nula,

$$\omega_1 a - \omega_2 \frac{a}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1 \sqrt{2} = \frac{v}{a} \sqrt{2}$$

Por tanto, sustituyendo los valores conocidos de ω_1 y ω_2 en (1) resulta

$$\mathbf{v}_C = -2v\mathbf{i} - v\mathbf{j} \quad (2)$$

2.- La velocidad angular es

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{v}{a}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad (3)$$

3.- Un punto genérico P del eje del movimiento helicoidal, definido a partir de la velocidad de un punto conocido (en nuestro caso tomamos B), viene dado por

$$\mathbf{BP} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_B}{\Omega^2} + \lambda(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}); \quad (4)$$

teniendo en cuenta $\mathbf{v}_B = -v\mathbf{i}$ y (3), resulta

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OB} + \mathbf{BP} = a\mathbf{i} + \frac{a}{3}(-\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \lambda(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}). \quad (5)$$

Para hallar la intersección con Oxz imponemos en esta última expresión que la componente y sea nula,

$$-\frac{a}{3} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a}{3}. \quad (6)$$

Sustituyendo de vuelta en (5) obtenemos el punto Q de corte buscado,

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{OQ} = \frac{2}{3}a(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \quad (7)$$

La velocidad de deslizamiento (módulo) se puede calcular proyectando la velocidad de un punto cualquiera en dirección de $\boldsymbol{\Omega}$:

$$v_{\text{desl}} = \mathbf{v}_B \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = -v\mathbf{i} \cdot \left(-\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{v}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

También podemos calcularla como vector, a través del campo de velocidades del sólido en el punto Q del eje:

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{QA} = \frac{v}{3}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad (9)$$