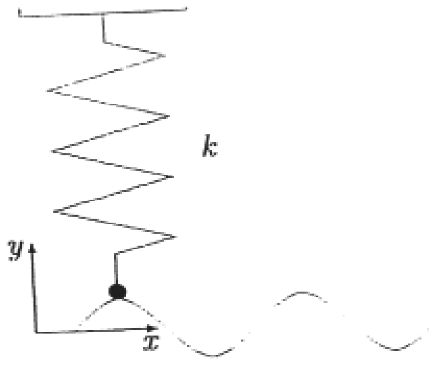
Un vehículo de masa m posee una suspensión que se puede representar mediante un resorte elástico de constante k y amortiguamiento despreciable, interpuesto entre la masa del vehículo y las ruedas (consideradas de masa despreciable), tal como se muestra en la figura adjunta. Se pide:

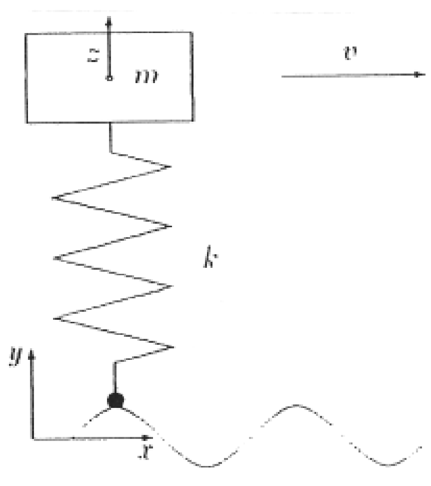


1. El vehículo viaja con velocidad constante v sobre un pavimento irregular, pudiendo representarse la superficie del mismo como ondulaciones de la superficie según la coordenada x en dirección de la marcha

$$y = a \operatorname{sen} \lambda x$$

siendo y la coordenada vertical. Calcular la amplitud del movimiento y la aceleración máxima experimentada por el vehículo en el régimen permanente (admitiendo que se alcanza el mismo gracias a un pequeño amortiguamiento inevitable), así como el cociente entre dicha aceleración y la que se produciría en caso de no haber suspensión de ningún tipo.

1.- Sea z el desplazamiento vertical del vehículo respecto de la posición de equilibrio del muelle (incluyendo el efecto del peso de la masa m). Las fuerzas que actúan son por una parte el peso, $W = -mg$, y por otra la fuerza elástica. El alargamiento del resorte es $(z - y - mg/k)$, luego la fuerza elástica es $F = -k(z - y - mg/k)$. La ecuación diferencial del movimiento es por tanto



$$m\ddot{z} = -mg - k\left(z - y - \frac{mg}{k}\right),$$

es decir,

$$m\ddot{z} = -k(z - y).$$

Esta ecuación también puede escribirse como

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 y \tag{1}$$

donde $\omega_0^2 = k/m$. El vehículo viaja con velocidad v, luego $x = vt$ y por tanto

$$y = a \operatorname{sen} \lambda vt \tag{2}$$

Sustituyendo en (1),

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 a \operatorname{sen} \lambda vt$$

Esta ecuación corresponde a oscilaciones forzadas con excitación armónica, de amplitud $q = \omega_0^2 a$ y frecuencia angular $\Omega = \lambda v$. La solución particular es

$$z_p = A \operatorname{sen}(\lambda vt) \tag{3}$$

donde

$$A = \pm \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \lambda^2 v^2}.$$

Si se admite que el vehículo se encuentra vibrando en régimen permanente, no es necesario obtener la solución de la homogénea que sólo aplica durante el régimen transitorio. El movimiento en régimen permanente del vehículo viene dado por (3).

Si no existiera la suspensión (es decir, si el vehículo estuviese rígidamente unido al terreno), sería $z(t) = y(t)$, con lo que la aceleración máxima experimentada por el vehículo sería, a partir de (2),

$$\ddot{y}_{\text{max}} = a\lambda^2 v^2$$

Con la suspensión, la aceleración máxima es, a partir de (3):

$$\ddot{z}_{\text{max}} = A\lambda^2 v^2$$

Por tanto el cociente pedido es

$$\frac{\ddot{z}_{\text{max}}}{\ddot{y}_{\text{max}}} = \frac{A}{a} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \lambda^2 v^2}.$$

Examinando esta expresión se pueden hacer las observaciones siguientes:

1. Si la suspensión es muy blanda (ω_0 pequeño) la aceleración máxima que experimenta el vehículo es pequeña; en el límite ($\omega_0 \to 0$) el vehículo no oscilaría.

2. Si la suspensión es muy dura (ω_0 alta) el cociente tiende a la unidad; en el límite ($\omega_0 \to \infty$) el vehículo experimenta directamente la vibración del terreno.

3. Existe un valor crítico, $\omega_0 = \lambda v$, para el que se produce resonancia y la amplificación de la aceleración tiende a infinito (en la práctica el amortiguamiento existente haría que se alcanzase un valor finito aunque muy alto).