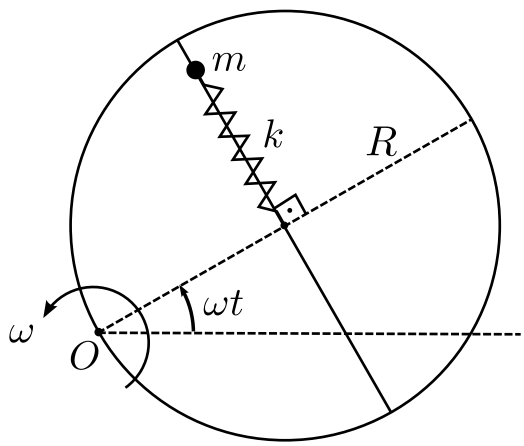
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE B1 (21 de Octubre de 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un disco de radio R gira alrededor de un punto fijo O de su borde con velocidad angular ω constante, manteniéndose siempre contenido en un plano horizontal fijo. El disco tiene una ranura lisa diametral que es perpendicular al diámetro que pasa por el punto fijo O, y dentro de ella se mueve una partícula de masa m con ligadura bilateral. Además, la partícula está unida al centro del disco mediante un resorte de constante k y longitud natural nula. Se supone que los parámetros del problema son tales que la partícula nunca abandona la ranura.



Se pide:

1. Obtener la ecuación del movimiento de la partícula en la ranura.
2. Obtener la reacción de la ranura sobre la partícula en un instante genérico.
3. Suponiendo que inicialmente la partícula parte del reposo desde el centro del disco, calcular el trabajo de la reacción sobre la partícula entre $t = 0$ y el primer instante en que la elongación del muelle es máxima.

⋆

1. Llamando s a la distancia de la partícula al centro del disco, las coordenadas cartesianas de la partícula son:

$$x = R\cos\omega t - s\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad , \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t + s\cos\omega t \tag{1}$$

Derivando dos veces (1) de obtiene la aceleración, que proyectada en la dirección $\boldsymbol{\tau}$ de la ranura resulta:

$$a_\tau = -\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \ddot{y}\cos\omega t = \ddot{s} - \omega^2 s \quad ,$$

por lo que la ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{s} + (k - m\omega^2)s = 0$$

que es armónico si $k > m\omega^2$

2. La aceleración proyectada en dirección $\boldsymbol{\nu}$ perpendicular a la ranura resulta:

$$a_\nu = \ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\,\mathrm{sen}\,\omega t = -\omega(2\dot{s} + \omega R) \quad ,$$

por lo que la reacción es $\boldsymbol{R} = -m\omega(2\dot{s} + \omega R)\boldsymbol{\nu}$.

3. Aplicando el teorema de la energía:

$$W^{reac} = \Delta T - W^{muelle}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad absoluta de la partícula es inicialmente nula y que $s_0 = 0$, de $\dot{x} = \dot{y} = 0$ se deduce que $\dot{s}_0 = -\omega R$, y la ecuación horaria del movimiento armónico es:

$$s(t) = -\frac{\omega R}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t$$

siendo $\omega_0^2 = (k - m\omega^2)/m$. Como cuando se alcanza la elongación máxima la primera vez $s_1 = -\omega R/\omega_0$ y $\dot{s}_1 = 0$, y teniendo en cuenta que la velocidad en un instante genérico es:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{s} + \omega R)^2 + s^2\omega^2$$

resulta:

$$\Delta T = T_1 = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \quad ,$$

y teniendo en cuenta que $W^{muelle} = -(1/2)ks_1^2$, se obtiene finalmente:

$$W^{reac} = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \left[m\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{k}{\omega_0^2}\right]$$