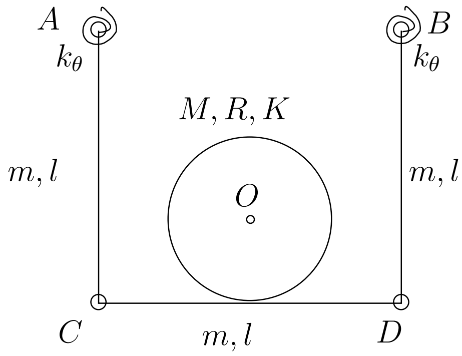
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C8 (4 de abril de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

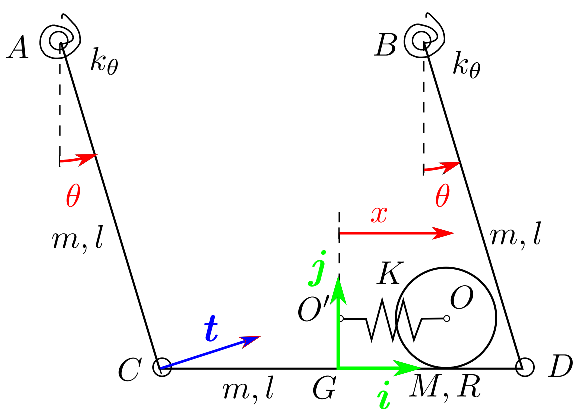
Un disco de radio R y masa M rueda sin deslizar sobre una barra horizontal CD de masa m y longitud l. Esta barra se encuentra articulada en sus extremos y unida a las barras AC y BD de igual longitud l y con la misma masa m, conectadas a su vez a los puntos fijos A y B. El centro del disco O se encuentra unido a un muelle de longitud natural nula y constante K, cuya fuerza es horizontal y proporcional al desplazamiento horizontal del punto O con respecto al punto medio de la barra CD. A su vez en los extremos A y B se dispone de unos muelles a torsión de rigidez k_θ, de acción proporcional al ángulo girado. Se pide:



1. Expresar e identificar el número de grados de libertad del sistema, así como sus valores para la posición de equilibrio estable.
2. Deducir las ecuaciones diferenciales del movimiento, linealizadas con respecto a la posición de equilibrio.
3. Obtención de las frecuencias y modos propios.
4. Cálculo de la matriz modal y las ecuaciones diferenciales expresadas en coordenadas normales, en el caso en que además del peso se aplique una fuerza horizontal $F(t)$ en el centro del disco O.

Nota: Para los apartados 3 y 4 emplear los siguientes valores: $R = l/4$, $M = m$, $k_\theta = mgl$, $K = \frac{3}{2}mg/l$.

1.— El sistema tiene dos grados de libertad. Como coordenadas generalizadas tomaremos el giro θ de las varillas AC y BD respecto de la vertical descendente y el desplazamiento relativo x del disco respecto del centro de la varilla CD.



La función potencial del sistema vale:

$$V = -2mgl\cos\theta - Mgl\cos\theta + k_\theta\theta^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \qquad (1)$$

lo que nos permite obtener el punto de equilibrio como:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial \theta} = (2m+M)gl\operatorname{sen}\theta + 2k_\theta\theta = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} = Kx = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \theta_{eq} = 0 \\ x_{eq} = 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

Será un punto de equilibrio estable si:

$$[\mathbf{K}] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{eq}} > 0; \quad \begin{bmatrix} (2m+M)gl + 2k_\theta & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{punto de equilibrio estable} \qquad (3)$$

2.— La matriz de rigidez ha sido definida en la ecuación (3). Para obtener la matriz de masas partimos de la expresión de la energía cinética, sabiendo que $\boldsymbol{v}_G = \dot{\theta} l \boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{v}_O = \dot{\theta} l \boldsymbol{t} + \dot{x}\boldsymbol{i}$:

$$T = 2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}v_O^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \tag{4}$$

$$= \left(\frac{5}{6}m + \frac{1}{2}M\right) l^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + M\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta \tag{5}$$

La matriz de masas se define como:

$$[\mathbf{M}]_{ij} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right]_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{eq}} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} (\frac{5}{3}m + M)l^2 & Ml \\ Ml & \frac{3}{2}M \end{bmatrix} \tag{6}$$

siendo las ecuaciones del movimiento para pequeñas variaciones alrededor de la posición de equilibrio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\frac{5}{3}m + M)l^2 & Ml \\ Ml & \frac{3}{2}M \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (2m+M)gl + 2k_\theta & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

3.— Para los valores de $R = l/4$, $M = m$, $k_\theta = mgl$, $K = \dfrac{3}{2}mg/l$ las matrices de masas y de rigidez quedan:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}ml^2 & ml \\ ml & \frac{3}{2}m \end{bmatrix}; \qquad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 5mgl & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\frac{mg}{l} \end{bmatrix} \tag{8}$$

La matriz característica y el polinomio característico en función de un autovalor λ son:

$$-\lambda[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 5mgl - \lambda\frac{8}{3}ml^2 & -\lambda ml \\ -\lambda ml & \frac{3}{2}\frac{mg}{l} - \lambda\frac{3}{2}m \end{bmatrix}; \tag{9}$$

$$\lambda^2 - \lambda\frac{23}{6}\frac{g}{l} + \frac{15}{6}\frac{g^2}{l^2} = 0 \tag{10}$$

Las raíces de este polinomio son los cuadrados de las frecuencias propias:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{5}{6}\frac{g}{l}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3\frac{g}{l}} \tag{11}$$

y los modos normales de vibración asociados a estas frecuencias propias son:

$$\{\boldsymbol{a}_1\} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{10}{3}l \end{bmatrix}; \quad \{\boldsymbol{a}_2\} = \begin{bmatrix} 1 \\ -l \end{bmatrix} \tag{12}$$

4.— La matriz modal se define como:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \{\boldsymbol{a}_1\}^T \\ \{\boldsymbol{a}_2\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3}l \\ 1 & -l \end{bmatrix} \tag{13}$$

El trabajo virtual de la fuerza horizontal $F(t)\boldsymbol{i}$ aplicada en O alrededor de la posición de equilibrio es:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta\boldsymbol{r}_O \cdot F(t)\boldsymbol{i} \\ &= (\delta\theta\, l + \delta x)\boldsymbol{i} \cdot F(t)\boldsymbol{i} \\ &= \delta\theta \underbrace{F(t)l}_{Q_\theta} + \delta x \underbrace{F(t)}_{Q_x} \end{aligned} \tag{14}$$

Las ecuaciones del movimiento pasan a ser:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{8}{3}ml^2 & ml \\ ml & \frac{3}{2}m \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\{\ddot{\boldsymbol{q}}\}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5mgl & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\frac{mg}{l} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}}_{\{\boldsymbol{q}\}} = F(t) \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Expresando la solución $\{\boldsymbol{q}\} = [\mathbf{A}]^T\{\boldsymbol{u}\}$ en función de las coordenadas normales $\{\boldsymbol{u}\}$ y operando en (15) se obtiene:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T\{\ddot{\boldsymbol{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T\{\boldsymbol{u}\} = F(t)[\mathbf{A}] \begin{bmatrix} l \\ 1 \end{bmatrix} = F(t) \begin{bmatrix} \frac{13}{3}l \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

siendo:

$$M_1 = \{\boldsymbol{a}_1\}[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{a}_1\} = 26ml^2; \quad M_2 = \{\boldsymbol{a}_2\}[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{a}_2\} = \frac{13}{6}ml^2 \tag{17}$$

A partir de (16) y (17) obtenemos las ecuaciones desacopladas pedidas:

$$\ddot{u}_1 + \frac{5}{6}\frac{g}{l}u_1 = \frac{F(t)}{6ml} \tag{18}$$

$$\ddot{u}_2 + 3\frac{g}{l}u_2 = 0 \tag{19}$$