Mecánica

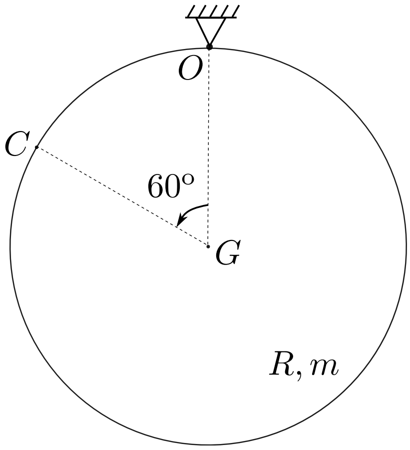
PRÁCTICA PUNTUABLE C7 (21 de marzo de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Un aro de radio R y masa m está articulado en su vértice fijo O. Estando en reposo en una situación de equilibrio estable, una partícula de igual masa m con velocidad v_0 conocida impacta perpendicularmente al plano del aro en el punto C con un coeficiente de restitución $e = 0$.

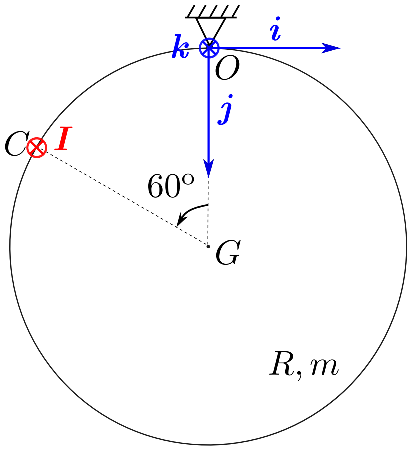
Se pide:

1. Calcular la velocidad angular del aro y la velocidad de la partícula justo después de la percusión;
2. Calcular el valor de la percusión entre aro y partícula y la percusión reactiva en O.



1.— Utilizando los ejes $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ definidos en la figura ($\boldsymbol{k}$ dirigido hacia dentro) identificamos las impulsiones actuantes:

- Aro: $I\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{R}_O$
- Partícula: $-I\boldsymbol{k}$



donde I es la impulsión que tiene lugar entre aro y partícula y $\boldsymbol{R}_O$ es la impulsión reactiva en O.

Definimos la cinemática antes del choque:

- Aro: $\boldsymbol{\Omega}^a = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{v}_G^a = \boldsymbol{0}$
- Partícula: $\boldsymbol{v}_P^a = v_0\boldsymbol{k}$

y después de choque:

- Aro: $\boldsymbol{\Omega}^d = \Omega_x\boldsymbol{i} + \Omega_y\boldsymbol{j} + \Omega_z\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{v}_G^d = \boldsymbol{\Omega}^d \wedge \boldsymbol{r}_{OG} = \Omega_x R\boldsymbol{k} - \Omega_z R\boldsymbol{i}$
- Partícula: $\boldsymbol{v}_P^d = v_1\boldsymbol{k}$

siendo Ω_x, Ω_y, Ω_z, v_1, I y $\boldsymbol{R}_O$ las incógnitas del problema.

Aplicamos los teoremas fundamentales de impulsiones:

- A la partícula:

$$m\boldsymbol{v}_P^d - m\boldsymbol{v}_P^a = -I\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad I = m(v_0 - v_1) \tag{1}$$

- Al aro:

$$m\boldsymbol{v}_G^d - m\boldsymbol{v}_G^a = m(\Omega_x R\boldsymbol{k} - \Omega_z R\boldsymbol{i}) = I\boldsymbol{k} + \boldsymbol{R}_O \tag{2}$$

$$\boldsymbol{I}_O \cdot \left(\boldsymbol{\Omega}^d - \boldsymbol{\Omega}^a\right) = \boldsymbol{r}_{OC} \wedge I\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}RI\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}RI\boldsymbol{i} \tag{3}$$

siendo

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mr^2 \\ B = \frac{1}{2}mR^2 \\ C = mR^2 + mR^2 = 2mr^2 \end{cases} \quad \text{en los ejes } \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$$

Descomponemos la ecuación vectorial (3) en cada una de sus componentes:

$$\frac{3}{2}mR^2\Omega_x = \frac{1}{2}RI \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}mR^2\Omega_y = \frac{\sqrt{3}}{2}RI \tag{5}$$

$$2mR^2\Omega_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_z = 0 \tag{6}$$

lo que nos permite obtener dividiendo (4)/(5) la expresión:

$$\Omega_y = 3\sqrt{3}\Omega_x \tag{7}$$

Por último, teniendo en cuenta que la velocidad de C después del choque es

$$\boldsymbol{v}_C^d = \boldsymbol{\Omega}^d \wedge \boldsymbol{r}_{OC} = (\Omega_x \boldsymbol{i} + \Omega_y \boldsymbol{j}) \wedge (-\frac{\sqrt{3}}{2}R\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}R\boldsymbol{j}) = (\frac{1}{2}\Omega_x R + \frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_y R)\boldsymbol{k}\,, \tag{8}$$

podemos imponer que el coeficiente de restitución del choque aro-partícula es nulo:

$$e = -\frac{(\boldsymbol{v}_C^d - \boldsymbol{v}_P^d)\cdot\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{v}_C^a - \boldsymbol{v}_P^a)\cdot\boldsymbol{k}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\Omega_x R + \frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_y R = v_1\,. \tag{9}$$

Si llevamos (7) a (9) obtenemos que $\Omega_x = v_1/(5R)$ lo que nos permite, sustituyendo esta expresión junto con (1) en la ecuación (4), obtener el valor de la velocidad de la partícula después del choque:

$$v_1 = \frac{5}{8}v_0\,. \tag{10}$$

A partir de este resultado podemos obtener la velocidad angular del aro después de choque y el valor de la impulsión I:

$$\Omega_x = \frac{v_0}{8R}; \quad \Omega_y = \frac{3\sqrt{3}v_0}{8R}; \quad \Omega_z = 0; \quad I = \frac{3}{8}mv_0\,. \tag{11}$$

2.— Para calcular el valor de la reacción en O llevamos los valores obtenidos en (11) a la ecuación (2) obteniendo finalmente:

$$\boldsymbol{R}_O = -\frac{1}{4}mv_0\,\boldsymbol{k}\,. \tag{12}$$