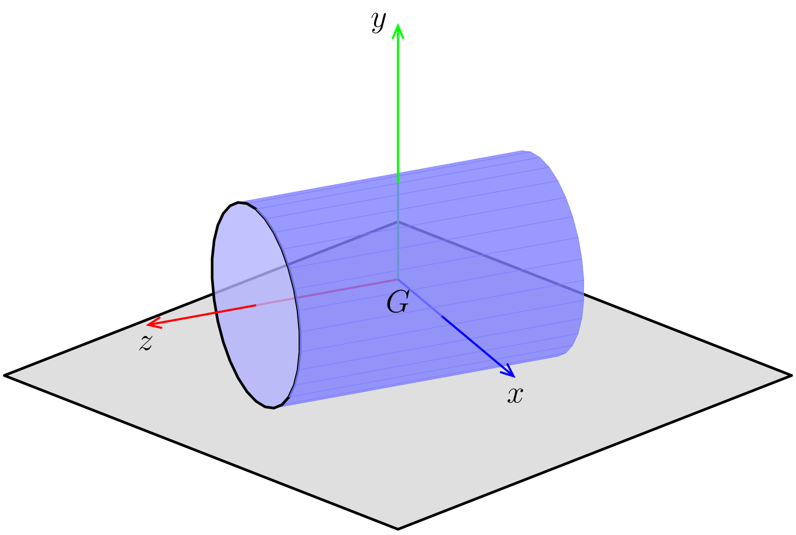
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C6 (22 de febrero de 2011)

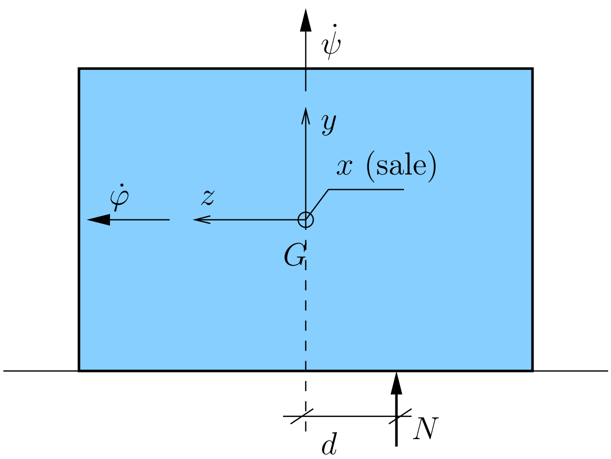
Apellidos *Nombre* *N.º mat.*



Se considera un cilindro recto de masa m, radio de la base a y altura $3a$ que permanece apoyado sobre un plano horizontal fijo y liso, de forma que puede pivotar y deslizar libremente, manteniéndose en contacto a través de una generatriz. En el instante inicial se impone al cilindro una rotación alrededor de su eje $(G, \boldsymbol{k})$ con velocidad ω_0. A su vez se imprime una velocidad de rotación al eje del cilindro alrededor de la vertical $\boldsymbol{K}$ de igual valor ω_0. Se pide:

1. Definir los grados de libertad del sólido y expresar el momento cinético en G y la energía cinética en función de los mismos y sus derivadas
2. Estudiar las integrales primeras que existan obteniendo la expresión de las mismas.
3. Obtener la reacción del plano sobre el cilindro (se trata de una fuerza distribuida sobre la generatriz, equivalente a su resultante aplicada en un determinado punto de la misma, lo que habrá que calcular).
4. Obtener el valor de ω_0 que ocasionaría que el cilindro se levantase del plano por uno de los extremos de la generatriz de contacto. Interpretar cualitativamente el fenómeno mediante el efecto giroscópico, deduciendo cuál de los dos extremos se levantaría.

⋆



1.— Los grados de libertad son en total 4: dos de traslación, las coordenadas en el plano horizontal del centro de masa (X, Y), y los ángulos girados ψ en torno a la vertical Gy y φ en torno al eje móvil Gz. Tomaremos el triedro móvil $Gxyz$ donde la dirección Gy es vertical (fija), Gz según el eje del cilindro (móvil) y Gx horizontal (móvil) y normal a las anteriores formando un triedro a derechas. Nótese que este es un *triedro intermedio* que no sigue al cuerpo en su rotación propia φ.

Las coordenadas X e Y carecen de interés ya que en horizontal no hay fuerza alguna y por tanto el movimiento de G será rectilíneo y con velocidad uniforme. En el problema nos centraremos en el movimiento alrededor de G.

El tensor de inercia es cilíndrico con momentos principales $A = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}m(3a)^2 = ma^2$, $C = \frac{1}{2}ma^2$. El momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_G = A\dot\psi\,\boldsymbol{j} + C\dot\varphi\,\boldsymbol{k}\,, \tag{1}$$

y la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}C\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)\,. \tag{2}$$

2.— En primer lugar, como ya se ha comentado, la velocidad horizontal de G es constante:

$$\dot{X} = v_{0X}\,,\ \dot{Y} = v_{0Y}\,. \tag{3}$$

El momento de las fuerzas exteriores en G es debido únicamente a la reacción normal N, situada a una distancia d de la vertical por G,

$$\boldsymbol{M}_G = Nd\,\boldsymbol{i}\,, \tag{4}$$

por tanto la componente según la dirección vertical fija del momento cinético se conserva:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{j} = A\dot{\psi} = A\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \omega_0 \quad \text{(cte.)} \tag{5}$$

Al tratarse de un sólido de revolución y ser nulo también el momento según Gz se conserva la componente del momento cinético según el eje (móvil) del cilindro:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = C\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \omega_0 \quad \text{(cte.)} \tag{6}$$

Por último, al ser todas las fuerzas conservativas, se conserva la energía:

$$E = T = \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}C\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = \frac{1}{2}A\omega_0^2 + \frac{1}{2}C\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_G^2\,, \tag{7}$$

ecuación que no aporta nada nuevo respecto a las anteriores (3), (5) y (6).

3.— Teniendo en cuenta que no hay movimiento vertical, el valor de la reacción es $N = mg$. La ecuación dinámica de balance del momento cinético es

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G \quad \Rightarrow \quad mgd\,\boldsymbol{i} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{j} \wedge (A\dot{\psi}\,\boldsymbol{j} + C\dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}) = C\dot{\psi}\dot{\varphi}\,\boldsymbol{i} = C\omega_0^2\boldsymbol{i}\,, \tag{8}$$

de donde se deduce

$$d = \frac{C\omega_0^2}{mg} = \frac{\omega_0^2}{2g}\,. \tag{9}$$

4.— El cilindro comenzará a levantarse cuando la resultante de la reacción se sitúe en el extremo de la generatriz de contacto, es decir $d = 3a/2$. Teniendo en cuenta (9) resulta

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{a}\,. \tag{10}$$

El extremo que se levantaría es el opuesto, es decir el situado en el sentido positivo del eje z, orientado según el vector velocidad de rotación propia $\dot{\varphi}$.