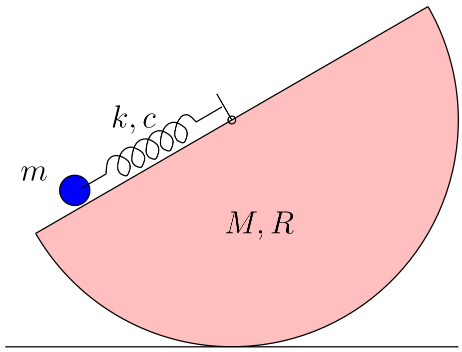
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C5 (15 de febrero de 2011)

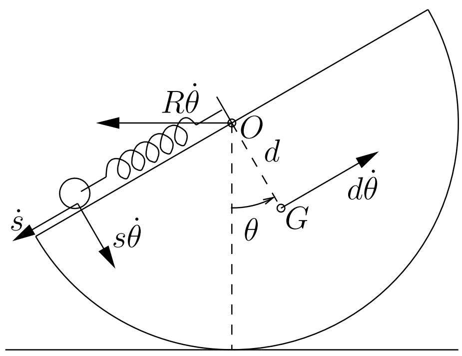
Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Un semidisco de radio R y masa M se mueve en un plano vertical, apoyado sobre una recta horizontal sobre la que rueda sin deslizar. Sobre el borde plano del semidisco hay a su vez una partícula de masa m que también desliza sin rozamiento, sujeta al centro por un elemento que combina un resorte lineal de constante k y longitud natural nula y un amortiguador viscoso de constante c. Se considera que la partícula no llega a salir del borde. Se pide:



1. Definir el número de grados de libertad del sistema, eligiendo unas coordenadas libres adecuadas;
2. Expresiones de la energía cinética y potencial del sistema;
3. Integrales primeras caso de haberlas;
4. Ecuaciones de Lagrange de la dinámica;
5. Repetir los pasos 1 a 4 para el caso en que el semidisco pueda deslizar libremente sobre la recta.

1.— Dado que rueda sin deslizar el sistema tiene dos grados de libertad. Elegimos como coordenadas libres la elongación del resorte s y el giro del semidisco θ.



2.— La energía cinética de la partícula m es

$$T_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(R\dot\theta\cos\theta + \dot s\right)^2 + \left(R\dot\theta\operatorname{sen}\theta - s\dot\theta\right)^2\right] \quad (1)$$

Para calcular la energía cinética del semidisco tenemos en cuenta que el centro de masa G del semidisco se halla a una distancia $d = 4R/(3\pi)$ del centro geométrico O, con lo que la energía cinética del semidisco es

$$T_M = \frac{1}{2}I_G\dot\theta^2 + \frac{1}{2}Mv_G^2\,; \quad (2)$$

siendo

$$I_G = I_O - Md^2 = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right); \quad v_G^2 = R^2\dot\theta^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2\dot\theta^2 - 2R\frac{4R}{3\pi}\dot\theta^2\cos\theta \quad (3)$$

resultando finalmente

$$T_M = \frac{1}{2}MR^2\dot\theta^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right). \quad (4)$$

La energía cinética del sistema es la suma de ambas energías cinéticas

$$T = T_m + T_M = \frac{1}{2}m\left[\left(R\dot{\theta}\cos\theta + \dot{s}\right)^2 + \left(R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - s\dot{\theta}\right)^2\right] + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right). \quad (5)$$

El potencial del sistema es la suma del potencial gravitatorio y del resorte

$$V = -Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta - mgs\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}ks^2\,. \quad (6)$$

3.— Calculamos la función lagrangiana a partir de la energía cinética y potencial del sistema

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(R^2 + s^2 - 2Rs\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + mR\dot{\theta}\dot{s}\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)$$
$$+ Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta + mgs\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}ks^2\,. \quad (7)$$

Ninguna de las coordenadas es cíclica, ya que ambas intervienen en la expresión de la Lagrangiana (7). No se conserva la energía, ya que la fuerza viscosa del amortiguador no es conservativa y tampoco existe la integral de Jacobi.

4.— El trabajo virtual de las fuerzas no conservativas es

$$\delta W^{nc} = -c\dot{s}\delta s\,; \quad (8)$$

lo que nos permite obtener las fuerzas generalizadas no conservativas $Q_\theta^{nc} = 0$ y $Q_s^{nc} = -c\dot{s}$. Las ecuaciones de Lagrange se obtienen derivando (7):

$$mR\ddot{\theta}\cos\theta + m\ddot{s} - ms\dot{\theta}^2 + ks - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = -c\dot{s}\,; \quad (9)$$

$$\left[m\left(R^2 + s^2 - 2Rs\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta} + mR\ddot{s}\cos\theta + m(2s - 2R\,\mathrm{sen}\,\theta)\dot{s}\dot{\theta}$$
$$- mRs\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\frac{8}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta + Mg\frac{4R}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta - mgs\cos\theta = 0\,; \quad (10)$$

5.— En este caso no aplica la condición de rodadura, por lo que el sistema tendrá 3 g.d.l.: (s, θ, x), siendo x el desplazamiento horizontal del centro del disco. Las expresiones (1) y (4) resultan:

$$T_m = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}\cos\theta + \dot{s})^2 + \left(\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta - s\dot{\theta}\right)^2\right]. \quad (11)$$

$$T_M = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{4}{3}\frac{M}{\pi}\dot{x}R\dot{\theta}\cos\theta\,. \quad (12)$$

La Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\theta + s^2\dot{\theta}^2 - 2s\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{4}{3}\frac{M}{\pi}\dot{x}R\dot{\theta}\cos\theta$$
$$+ Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta + mgs\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}ks^2\,. \quad (13)$$

El grado de libertad x es una coordenada cíclica, ya que L no depende explícitamente del mismo. Físicamente corresponde a la conservación de la cantidad de movimiento horizontal por la ausencia de fuerzas externas según dicha dirección:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{s}\cos\theta - ms\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + m\dot{x} + M\dot{x} - M\frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}\cos\theta \quad \text{(cte.)} \quad (14)$$

Las otras dos ecuaciones de Lagrange resultan:

$$m\ddot{x}\cos\theta + m\ddot{s} - ms\dot{\theta}^2 + ks - mg\operatorname{sen}\theta = -c\dot{s} \tag{15}$$

$$ms^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - M\frac{4R}{3\pi}R\ddot{x}\cos\theta - ms\ddot{x}\operatorname{sen}\theta + 2ms\dot{\theta}\dot{s} + Mg\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta - mgs\cos\theta = 0 \tag{16}$$