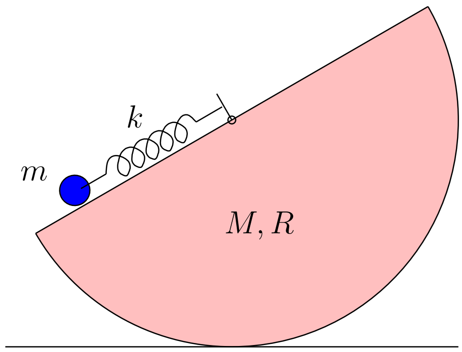
Mecánica

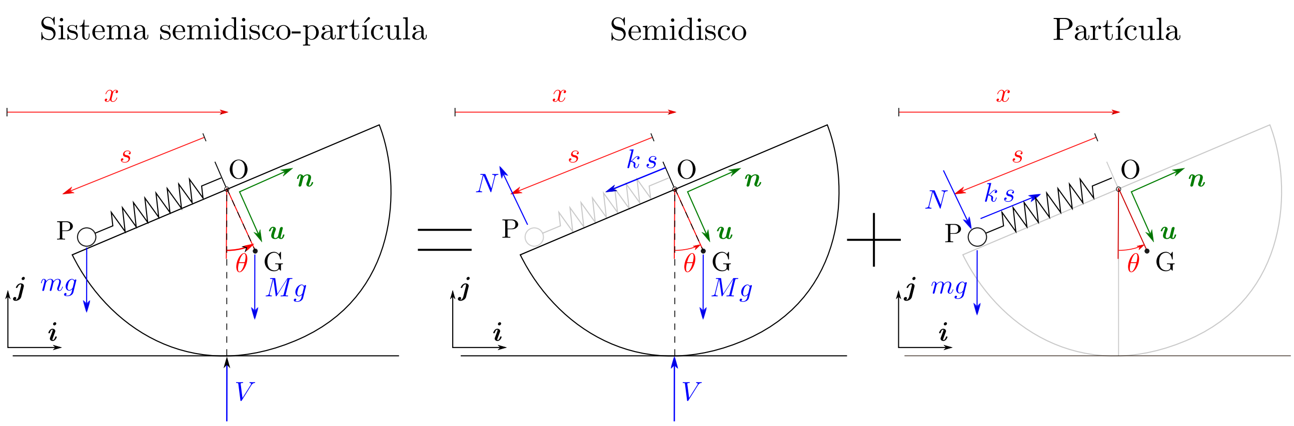
PRÁCTICA PUNTUABLE C4 (11 de enero de 2011)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Un semidisco de radio R y masa M se mueve dentro de en un plano vertical, apoyado sobre una recta horizontal lisa sobre la que puede deslizar libremente. Sobre el borde plano del semidisco hay a su vez una partícula de masa m que también desliza sin rozamiento, sujeta al centro por un resorte lineal de constante k y longitud natural nula. Se considera que la partícula no llega a salir del borde. Se pide:



1. Definir el número de grados de libertad del sistema, eligiendo unas coordenadas libres adecuadas. Identificar las reacciones de los enlaces;
2. Integrales primeras caso de haberlas;
3. Obtener las expresiones de las reacciones en función de las coordenadas y sus derivadas;
4. Obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica del sistema (de segundo orden).



1.— Debido a que el semidisco desliza libremente los grados de libertad necesarios para definir la posición del sistema son $\{x, \theta, s\}$, siendo x el desplazamiento del centro del semidisco según la dirección horizontal, θ el ángulo girado por el semidisco y s la elongación del resorte.

Las reacciones de los enlaces son $\{V, N\}$, siendo V la reacción vertical en el contacto liso del semidisco con la recta y N la reacción interna que la partícula y el semidisco ejercen entre ellos.

El sistema semidisco-partícula tiene cuatro incógnitas $\{x, \theta, s, V\}$ mientras que las ecuaciones cardinales son tres. Por lo tanto debemos descomponerlo en sus dos subsistemas componentes obteniendo ahora cinco ecuaciones (tres en el semidisco y dos en la partícula) que nos permitirán obtener las cinco incógnitas $\{x, \theta, s, V, N\}$ resultantes.

2.— En el sistema semidisco–partícula se conserva la energía mecánica, dado que todas las fuerzas existentes son conservativas y los enlaces son lisos.

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G^{SD}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mv_P^2 + \frac{1}{2}ks^2 - Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta - mgs\operatorname{sen}\theta \qquad (1)\\
&= \frac{1}{2}M\left(\dot x^2 + \frac{1}{2}R^2\dot\theta^2 + \frac{8R}{3\pi}\cos\theta\,\dot x\dot\theta\right) + \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot s^2 + s^2\dot\theta^2 - 2\dot x\dot s\cos\theta + 2\dot x\dot\theta s\operatorname{sen}\theta)\\
&\quad + \frac{1}{2}ks^2 - Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta - mgs\operatorname{sen}\theta = E_0
\end{aligned}
$$

donde se ha situado el origen de energía pontencial en la recta horizontal que pasa por el centro del semidisco y se ha utilizado que la distancia entre los puntos O y G vale $|\overrightarrow{OG}| = 4R/3\pi$.

También se conserva la componente horizontal del la cantidad de movimiento porque la resultante de las fuerzas según esa dirección es nula.

$$
\begin{aligned}
p_x &= M\boldsymbol{v}_G\cdot\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{v}_P\cdot\boldsymbol{i} \qquad (2)\\
&= M\left(\dot x + \frac{4R}{3\pi}\dot\theta\cos\theta\right) + m(\dot x - \dot s\cos\theta + s\dot\theta\operatorname{sen}\theta) = p_{x0}
\end{aligned}
$$

En las ecuaciones (1)–(2) hemos utilizado las expresiones de $\boldsymbol{v}_G$, $\boldsymbol{v}_P$ y del momento de inercia I_G^{SD} del semidisco en G que valen:

$$
\boldsymbol{v}_G = \dot x\,\boldsymbol{i} + \frac{4R}{3\pi}\dot\theta\,\boldsymbol{n} = \left(\dot x\cos\theta + \frac{4R}{3\pi}\dot\theta\right)\boldsymbol{n} + \dot x\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u} \qquad (3)
$$

$$
\boldsymbol{v}_P = \dot x\,\boldsymbol{i} - \dot s\,\boldsymbol{n} + s\dot\theta\,\boldsymbol{u} = (\dot x\cos\theta - \dot s)\boldsymbol{n} + (\dot x\operatorname{sen}\theta + s\dot\theta)\boldsymbol{u} \qquad (4)
$$

$$
I_G^{SD} = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) \qquad (5)
$$

siendo $\boldsymbol{u} = \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} - \cos\theta\,\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{n} = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}$ (ver Figura).

3.— Para calcular la reacción N imponemos el balance de la cantidad de movimiento en la partícula según la direccion $\boldsymbol{u}$.

$$
N + mg\cos\theta = m\boldsymbol{a}_P\cdot\boldsymbol{u} = m\left(\ddot x\operatorname{sen}\theta + 2\dot s\dot\theta + s\ddot\theta\right) \qquad (6)
$$

siendo

$$
\boldsymbol{a}_P = \ddot x\,\boldsymbol{i} - (\ddot s - s\dot\theta^2)\boldsymbol{n} + (2\dot s\dot\theta + s\ddot\theta)\boldsymbol{u}. \qquad (7)
$$

Para calcular la reacción V imponemos el balance de la cantidad de movimiento en el conjunto según la dirección $\boldsymbol{j}$.

$$
\begin{aligned}
V - Mg - mg &= M\boldsymbol{a}_G\cdot\boldsymbol{j} + m\boldsymbol{a}_P\cdot\boldsymbol{j} \qquad (8)\\
&= M\left(\frac{4R}{3\pi}\dot\theta^2\cos\theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot\theta\operatorname{sen}\theta\right) - m\left[(\ddot s - s\dot\theta^2)\operatorname{sen}\theta + (2\dot s\dot\theta + s\ddot\theta)\cos\theta\right]
\end{aligned}
$$

siendo

$$
\boldsymbol{a}_G = \ddot x\,\boldsymbol{i} - \frac{4R}{3\pi}\dot\theta^2\,\boldsymbol{u} + \frac{4R}{3\pi}\ddot\theta\,\boldsymbol{n}. \qquad (9)
$$

De las ecuaciones (6) y (8) obtenemos el valor de las reacciones solicitado:

$$
N = m(\ddot x\operatorname{sen}\theta + 2\dot s\dot\theta + s\ddot\theta - g\cos\theta) \qquad (10)
$$

$$
\begin{aligned}
V &= (M+m)\,g + M\left(\frac{4R}{3\pi}\dot\theta^2\cos\theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot\theta\operatorname{sen}\theta\right) \qquad (11)\\
&\quad - m\left[(\ddot s - s\dot\theta^2)\operatorname{sen}\theta + (2\dot s\dot\theta + s\ddot\theta)\cos\theta\right].
\end{aligned}
$$

4.— Para obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica del sistema (de segundo orden) imponemos:

- Balance de la cantidad de movimiento de la partícula en la dirección $\boldsymbol{n}$.

$$ks - mg \operatorname{sen}\theta = m\boldsymbol{a}_P \cdot \boldsymbol{n} = m(\ddot{x}\cos\theta - \ddot{s} + s\dot{\theta}^2) \tag{12}$$

- Balance de la cantidad de movimiento del sistema en la dirección $\boldsymbol{i}$.

$$\begin{aligned} 0 &= M\boldsymbol{a}_G \cdot \boldsymbol{i} + m\boldsymbol{a}_P \cdot \boldsymbol{i} \qquad (13) \\ &= M\left(\ddot{x} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}\cos\theta\right) + m\left[\ddot{x} - (\ddot{s} - s\dot{\theta}^2)\cos\theta + (2\dot{s}\dot{\theta} + s\ddot{\theta})\operatorname{sen}\theta\right] \end{aligned}$$

- Balance del momento cinético del semidisco en G.

$$-V\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta - Ns + ks\frac{4R}{3\pi} = I_G^{SD}\ddot{\theta} \tag{14}$$

habiéndose definido I_G^{SD}, N y V en las ecuaciones (5), (10) y (11).