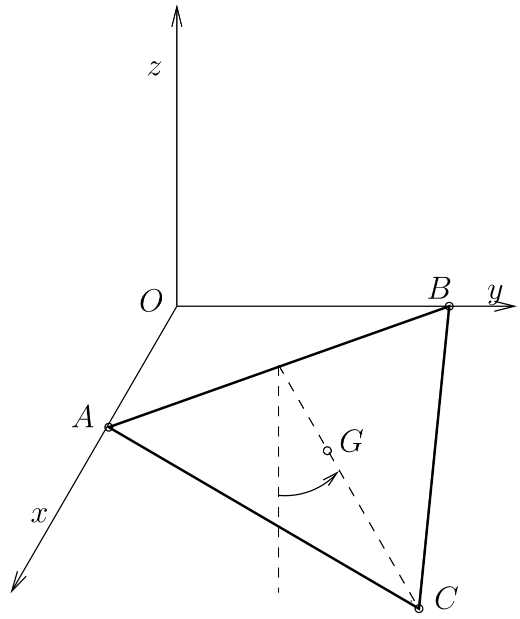
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C3 (16 de noviembre de 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

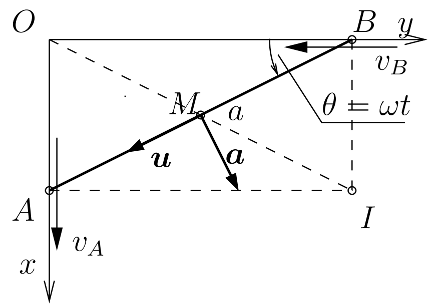
Un triángulo equilátero ABC de lado a se mueve de forma que el vértice A se mueve sobre el eje Ox con velocidad $a\omega\cos\omega t$, y el vértice B se mueve sobre el eje Oy ortogonal al anterior. A su vez, el triángulo gira alrededor de AB con velocidad angular ω.



1. Obtener la velocidad angular del movimiento del segmento AB dentro del plano Oxy, la posición del centro instantáneo de rotación de este movimiento, y el lugar geométrico que define este punto a lo largo del movimiento.
2. Calcular la velocidad de rotación del triángulo y su aceleración angular. Obtener la velocidad y la aceleración del centro de masas G del triángulo.
3. Razonar si el movimiento instantáneo es una rotación, calculando la velocidad de deslizamiento o mínima y el eje helicoidal tangente.

---

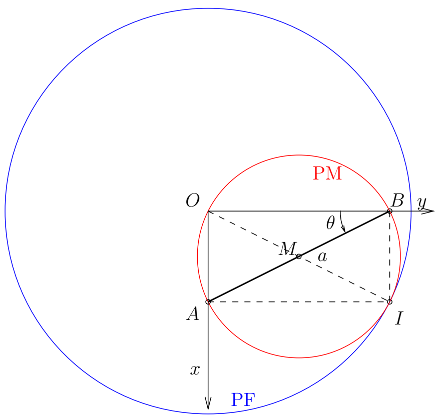
§1. El dato de la velocidad de A permite obtener su coordenada mediante una integral,



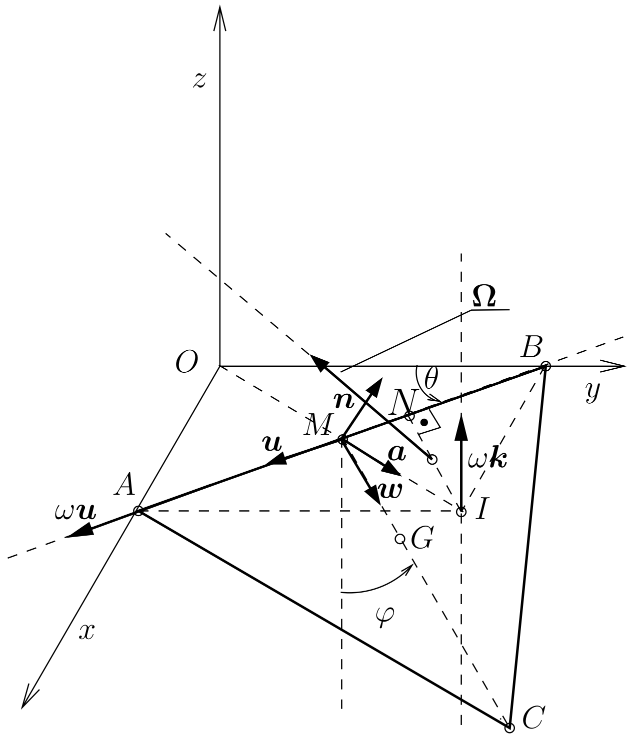
$$x_A = \int_0^t v_A \mathrm{d}t = \int_0^t a\omega\cos\omega t\,\mathrm{d}t = a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,, \qquad (1)$$

donde se ha considerado el origen de tiempo de forma que se anule la constante de integración, sin pérdida de generalidad. Esto conduce a interpretar que el ángulo que forma el segmento AB con el eje Oy vale $\angle ABO = \theta = \omega t$. En consecuencia, la velocidad angular del movimiento plano de AB es precisamente ω, como vector $\omega\,\boldsymbol{k}$. El centro instantáneo de rotación (CIR) de este movimiento se sitúa en un punto que se halle sobre las perpendiculares a las velocidades respectivas de A y B, se trata del punto I de la figura adjunta, de coordenadas $x_I = x_A = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y_I = y_B = a\cos\theta$.

Se comprueba fácilmente que la distancia del origen al CIR es constante, $\overline{OI} = a$, por lo que el lugar geométrico (Polar Fija PF) será una circunferencia de centro en O y radio a. Por otra parte, en la referencia del plano móvil, el segmento AB se ve desde I bajo el ángulo constante $\pi/2$, es decir I pertenece al arco capaz de $\pi/2$ para AB que es como se sabe otra circunferencia, de diámetro AB (Polar Móvil PM). En la figura se muestran estos lugares geométricos.



§2. El movimiento es la composición de dos rotaciones, una la obtenida en el apartado anterior, $\omega\,\boldsymbol{k}$ por I, otra la rotación $\omega\,\boldsymbol{u}$ alrededor del segmento AB. Como los ejes respectivos en general se cruzan sin cortarse será un movimiento helicoidal tangente y no una rotación instantánea. En lo que sigue consideraremos los vectores del triedro móvil $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{n})$ ligado al triángulo, además del vector unitario $\boldsymbol{a}$ normal a AB en el plano Oxy, ver figura adjunta.



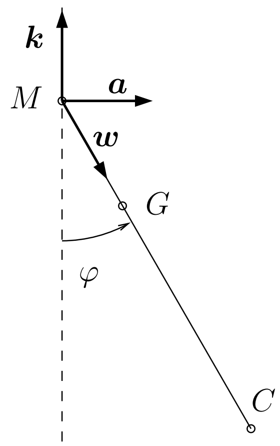
La velocidad angular es por tanto

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{k} + \omega\,\boldsymbol{u}\,. \tag{2}$$

Para calcular la aceleración angular tenemos en cuenta que la única componente de $\boldsymbol{\Omega}$ que varía con el tiempo es $\omega\,\boldsymbol{u}$, que gira dentro del plano Oxy ligada a AB y por tanto con velocidad angular $\omega\,\boldsymbol{k}$, es decir su derivada vale

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega\,\boldsymbol{k}\wedge\omega\,\boldsymbol{u} = \omega^2\,\boldsymbol{a}\,. \tag{3}$$

La velocidad de G es



$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AG} &= a\omega\cos\theta\,\boldsymbol{i} + (\omega\,\boldsymbol{k}+\omega\,\boldsymbol{u})\wedge\left(-\frac{a}{2}\boldsymbol{u}+\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{w}\right)\\ &= a\omega\cos\theta\,\boldsymbol{i} - \omega\frac{a}{2}\boldsymbol{a} - \omega\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{u} + \omega\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{n}\\ &= \frac{\omega a}{2}\left[\cos\theta\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{u} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{n}\,.\right]\end{aligned} \tag{4}$$

La aceleración se obtiene a partir de

$$\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r}_{AG} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AG})\,, \tag{5}$$

donde los distintos términos valen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_A &= -a\omega^2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i}\,,\\ \dot{\boldsymbol{\Omega}}\wedge\boldsymbol{r}_{AG} &= \frac{a}{2}\omega^2\left(\boldsymbol{k}-\frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}\right),\\ \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AG}) &= \frac{a}{2}\omega^2\left(\boldsymbol{u}-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}-\frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{k}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{w}\right),\end{aligned} \tag{6}$$

siendo la suma

$$\boldsymbol{a}_G = -a\omega^2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \frac{a}{2}\omega^2\left[\left(1-2\frac{\cos\varphi}{\sqrt{3}}\right)\boldsymbol{u} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{w}\right]. \tag{7}$$

§3. Como se ha dicho antes, el movimiento instantáneo en general es helicoidal tangente, con velocidad mínima o de deslizamiento no nula, cuyo valor es

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_A\cdot\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = \frac{a\omega\cos\theta}{\omega\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\cdot(\omega\boldsymbol{u}+\omega\boldsymbol{k}) = \frac{a\omega}{2\sqrt{2}}\operatorname{sen}2\theta\,. \tag{8}$$

Esta velocidad se anula sólo para $\theta = 0, \pi/2$, que son las posiciones particulares extremas en las que el movimiento es una rotación instantánea: en la primera AB está sobre el eje Oy y en la segunda sobre Ox.

El eje helicoidal tangente pasará por el punto medio del segmento de mínima distancia entre los ejes de rotación que se cruzan, segmento $\overline{IN} = a\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.