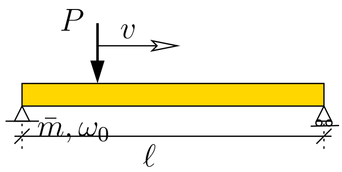
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C2 (2 de noviembre de 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Se considera un puente recto biapoyado, de luz ℓ entre apoyos y de sección constante. El puente es atravesado por una carga móvil P correspondiente al eje de un vehículo ferroviario de alta velocidad con velocidad v. Al paso de la carga el puente se deforma elásticamente, siendo la flecha en el centro del vano $u(t)$. La respuesta del puente puede considerarse como un sistema lineal de un grado de libertad con frecuencia propia (del sistema sin amortiguar) ω_0, tasa de amortiguamiento respecto al crítico ζ, masa equivalente $M = \bar{m}\ell/2$, siendo $\bar{m}$ la masa por unidad de longitud, y fuerza aplicada $f(t) = P\,\mathrm{sen}(\pi v t/\ell)$. Se considerará que el puente está en reposo cuando entra la carga móvil. Se pide:



1. Escribir la ecuación diferencial del movimiento, y resolverla para obtener la respuesta $u(t)$ durante el tiempo que la carga está sobre el puente. Expresar esta solución en función del parámetro $r = \Omega/\omega_0$, siendo $\Omega = \pi v/\ell$ la frecuencia de la excitación debida a la carga móvil.

2. Se considera el caso particular $P = 200$ kN, $v = 360$ km/h, $\ell = 20$ m, $\bar{m} = 20$ t/m, $\omega_0 = 4$ Hz, $\zeta = 0$ (es decir sin amortiguamiento). Calcular el valor máximo de la respuesta dinámica durante el tiempo que la carga está sobre el puente y el instante en que se produce, obteniendo asimismo el *factor de impacto* por el que hay que multiplicar la flecha estática para obtener la máxima respuesta dinámica.

---

§1. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{P}{M}\,\mathrm{sen}\,\Omega t\,, \tag{1}$$

siendo $\Omega = \pi v/\ell$. La solución a esta ecuación tiene la estructura conocida suma de una solución particular de la completa y la solución general de la homogénea, $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$, definidas de forma general como

$$u_h(t) = \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}(A\,\mathrm{sen}\,\omega_D t + B\cos\omega_D t)\,, \tag{2}$$
$$u_p(t) = C\,\mathrm{sen}\,\Omega t + D\cos\Omega t\,, \tag{3}$$

siendo $\omega_D = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$. Imponiendo que u_p cumpla la ecuación diferencial (1):

$$[C(-\Omega^2+\omega_0^2) - D(2\zeta\omega_0\Omega)]\,\mathrm{sen}\,\Omega t + [C(2\zeta\omega_0\Omega) + D(-\Omega^2+\omega_0^2)]\cos\Omega t = \frac{P}{M}\,\mathrm{sen}\,\Omega t\,, \tag{4}$$

y particularizando para los instantes $\Omega t = 0, \pi/2$ se obtienen las constantes

$$C = \frac{P}{M\omega_0^2}\frac{1-r^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\,, \qquad D = -\frac{P}{M\omega_0^2}\frac{2\zeta r}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\,. \tag{5}$$

Sustituyendo estos valores en la solución e imponiendo las condiciones iniciales se obtienen las constantes A y B:

$$0 = u(0) = B + D \quad \Rightarrow \quad B = -D = \frac{P}{M\omega_0^2} \frac{2\zeta r}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\,, \tag{6}$$

$$0 = \dot{u}(0) = -\zeta\omega_0 B + A\omega_D + C\Omega \quad \Rightarrow \quad A = \frac{P}{M\omega_0^2} \frac{(2\zeta^2 - (1-r^2))r/\sqrt{1-\zeta^2}}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\,. \tag{7}$$

Sustituyendo estas constantes la expresión final de la solución es

$$u(t) = \frac{P}{M\omega_0^2} \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \Big\{ \mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t} \Big[\frac{r(2\zeta^2 - (1-r^2))}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega_D t + 2\zeta r \cos \omega_D t \Big] + (1-r^2) \operatorname{sen} \Omega t - 2\zeta r \cos \Omega t \Big\}\,. \tag{8}$$

§2. Considerando $\zeta = 0$ la expresión de la solución (8) queda

$$u(t) = \frac{P}{M\omega_0^2} \frac{1}{1-r^2} \Big[-r \operatorname{sen} \omega_0 t + \operatorname{sen} \Omega t \Big]\,. \tag{9}$$

La condición de máximo $0 = \dot{u}$ conduce a

$$0 = \cos \Omega t - \cos \omega_0 t = -2 \operatorname{sen} \frac{\Omega + \omega_0}{2} t \operatorname{sen} \frac{\Omega - \omega_0}{2} t\,; \tag{10}$$

la primera solución se produce para

$$\frac{\Omega + \omega_0}{2} t = \pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\pi}{\Omega + \omega_0} = \frac{2}{13} = 0{,}15385\,\mathrm{s} \tag{11}$$

y sustituyendo este valor en (9) se obtiene, en función de la respuesta estática $u_s = P/(M\omega_0^2) = 1{,}5831$ mm, el factor de impacto ϕ pedido:

$$u_{\max} = 1{,}7683 u_s = 2{,}7995\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow \quad \phi = 1{,}7683\,. \tag{12}$$