Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C1 (19 de octubre de 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Se considera un elipsoide de revolución de semiejes a y c, definido por las ecuaciones paramétricas en coordenadas cilíndricas:

$$\rho = a\cos\beta\,; \quad z = c\,\mathrm{sen}\,\beta\,.$$

Sobre el elipsoide se mueve con ligadura bilateral y lisa una partícula pesada de masa m. Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento (de orden 2).
2. Se desea obtener un movimiento en una trayectoria horizontal; calcular en qué casos son posibles dichas trayectorias, la velocidad necesaria de la partícula, y el valor de la reacción.
3. Se lanza la partícula desde $z = 0$ con velocidad horizontal $v_0 = \sqrt{2ga}$; obtener las alturas mínima y máxima de la trayectoria.

---

§1. En primer lugar resumimos las ecuaciones básicas que definen la geometría de la superficie. La ecuación intrínseca del elipsoide en coordenadas cartesianas orientadas según los ejes principales del mismo y en cilíndricas es respectivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,; \qquad \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \tag{1}$$

donde se tiene en cuenta $\rho = x^2 + y^2$. El meridiano del elipsoide es una elipse cuyos ejes son los de las coordenadas ρ y z respectivamente, generándose el elipsoide por revolución de dicha elipse.

Paramétricamente el elipsoide se puede definir mediante dos coordenadas, β contenida en la definición del enunciado y θ de las coordenadas polares. De esta forma, en cartesianas sería

$$x = a\cos\beta\cos\theta\,; \qquad y = a\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\theta\,; \qquad z = c\,\mathrm{sen}\,\beta\,. \tag{2}$$

La normal a la superficie en un punto está contenida en el plano meridiano y por tanto puede calcularse como gradiente de $(1)_b$:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{2\rho}{a^2}\boldsymbol{u}_\rho + \frac{2z}{c^2}\boldsymbol{k} = \frac{2}{a}\cos\beta\,\boldsymbol{u}_\rho + \frac{2}{c}\,\mathrm{sen}\,\beta\,\boldsymbol{k} \quad \text{(vector no unitario)}\,. \tag{3}$$

Por último, se pueden obtener dos vectores tangentes al elipsoide según las líneas coordenadas (θ, β):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} &= a\cos\beta(-\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}) = a\cos\beta\,\boldsymbol{u}_\theta \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} &= -a\,\mathrm{sen}\,\beta(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j}) + c\cos\beta\,\boldsymbol{k} = -a\,\mathrm{sen}\,\beta\,\boldsymbol{u}_\rho + c\cos\beta\,\boldsymbol{k}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Estos vectores tampoco son unitarios, y se comprueba fácilmente que el producto $(\partial\boldsymbol{r}/\partial\beta) \wedge (\partial\boldsymbol{r}/\partial\theta)$ es un vector normal paralelo a (3).

Las fuerzas sobre la partícula son el peso y la reacción normal:

$$\boldsymbol{F} = -mg\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{N} = -mg\,\boldsymbol{k} + \lambda\left(\frac{\cos\beta}{a}\boldsymbol{u}_\rho + \frac{\operatorname{sen}\beta}{c}\boldsymbol{k}\right)\,, \tag{5}$$

siendo λ un multiplicador de valor a priori desconocido que define la magnitud de la reacción normal. Proyectando según la base física en cilíndricas,

$$F_\rho = \lambda\frac{\cos\beta}{a}\,; \qquad F_\theta = 0\,; \qquad F_z = -mg + \lambda\frac{\operatorname{sen}\beta}{c}\,, \tag{6}$$

y teniendo en cuenta las componentes de la aceleración, resultan las ecuaciones

$$\lambda\frac{\cos\beta}{a} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,; \tag{7}$$

$$0 = m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,; \tag{8}$$

$$-mg + \lambda\frac{\operatorname{sen}\beta}{c} = m\ddot{z}\,. \tag{9}$$

Estas tres ecuaciones junto con la de la superficie $(1)_b$ plantean el problema para resolver las 4 incógnitas $(\rho, \theta, z, \lambda)$. Sustituyendo las expresiones de (ρ, z) en función del parámetro β se expresan en función de (θ, β):

$$\lambda\frac{\cos\beta}{a} = ma(-\operatorname{sen}\beta\,\ddot{\beta} - \cos\beta\,\dot{\beta}^2 - \cos\beta\,\dot{\theta}^2)\,, \tag{10}$$

$$0 = ma(-2\operatorname{sen}\beta\,\dot{\beta}\dot{\theta} + \cos\beta\,\ddot{\theta})\,, \tag{11}$$

$$-mg + \lambda\frac{\operatorname{sen}\beta}{c} = mc(\cos\beta\,\ddot{\beta} - \operatorname{sen}\beta\,\dot{\beta}^2)\,. \tag{12}$$

Por último, se puede eliminar la reacción incógnita λ proyectando estas componentes según el vector tangente $\partial\boldsymbol{r}/\partial\beta$, resultando:

$$-\,mgc\cos\beta = m[(-a^2\operatorname{sen}^2\beta + c^2\cos^2\beta)\ddot{\beta} - (a^2 + c^2)\operatorname{sen}\beta\cos\beta\,\dot{\beta}^2 - a^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta\,\dot{\theta}^2]\,. \tag{13}$$

Esta última ecuación junto con (11) definen la dinámica en función de las coordenadas libres en la superficie (θ, β).

§2. La trayectoria horizontal será una circunferencia, con z, ρ y β constantes. De (9) se deduce

$$\ddot{z} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = mg\frac{c}{\operatorname{sen}\beta}, \tag{14}$$

y sustituyendo en (7) obtenemos

$$\operatorname{tg}\beta = -g\frac{c/a}{\rho\dot{\theta}^2} < 0\,, \tag{15}$$

de donde se concluye por una parte que la velocidad $\dot{\theta}$ será constante en el movimiento, y por otra que el ángulo β ha de ser necesariamente negativo, es decir la trayectoria circular sólo se puede desarrollar en la mitad inferior del elipsoide $(-\pi/2 < \beta < 0)$. El valor de la velocidad angular en esta circunferencia puede expresarse como

$$\dot{\theta}^2 = -g\frac{c/a}{\rho\operatorname{tg}\beta} = -g\frac{c}{a^2\operatorname{sen}\beta} = -g\frac{c^2}{a^2 z}\,. \tag{16}$$

Teniendo en cuenta el valor de λ de (14) se obtiene de (5) la reacción normal de la superficie:

$$N = mg\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}\operatorname{cotg}^2\beta}\,. \tag{17}$$

§3. Las condiciones iniciales zon $z = \dot{z} = 0$, $\rho = a$, $\dot{\rho} = 0$ y $\dot{\theta} = \sqrt{2g/a}$. Se conserva la energia $E = T + V$ puesto que el peso es conservativo y la superficie lisa:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = mga\,. \tag{18}$$

Por otra parte, todas las fuerzas bien cortan al eje Oz bien son paralelas a él, por lo que el momento cinético respecto a este eje es constante:

$$H_z = m\rho^2\dot{\theta} = ma\sqrt{2ga}\,. \tag{19}$$

Eliminando $\dot{\theta}$ en (19) y sustituyendo en (18)

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \frac{2ga^3}{\rho^2} + \dot{z}^2\right) + mgz = mga\,. \tag{20}$$

Si consideramos que en los puntos de máxima y mínima altura de la trayectoria sería $\dot{z} = \dot{\rho} = 0$ se obtiene

$$\frac{a^3}{\rho^2} + z = a\,, \tag{21}$$

y sustituyendo $\rho^2 = a^2\cos^2\beta = a^2(1 - \operatorname{sen}^2\beta)$ y $\operatorname{sen}\beta = z/c$:

$$z\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) = -a\frac{z^2}{c^2}\,. \tag{22}$$

En esta ecuación comprobamos que una solución es $z = 0$. Este valor corresponde a un máximo, ya que sustituyendo en la ecuación (9) se obtiene $\ddot{z} < 0$. Eliminando esta solución, en la ecuación que resta,

$$1 - \frac{z^2}{c^2} = -a\frac{z}{c^2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4c^2}}{2}\,. \tag{23}$$

La única solución posible corresponde al signo $-$ de la raíz, ya que la nueva solución debe corresponder a un mínimo y por tanto ser $z < 0$. El signo $+$ proporciona un valor $z > 0$ que físicamente no es viable, por ejemplo en la ecuación (21) sería $\rho^2 < 0$. Por tanto el movimiento discurre entre los valores de z siguientes:

$$z_{\max} = 0\,, \qquad z_{\min} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + c^2}\,. \tag{24}$$