

41. Se considera un segmento de paraboloides macizo, homogéneo y de masa  $m$

$$z = \frac{h}{R^2}(x^2 + y^2)$$

$$z \leq h$$

Se pide:

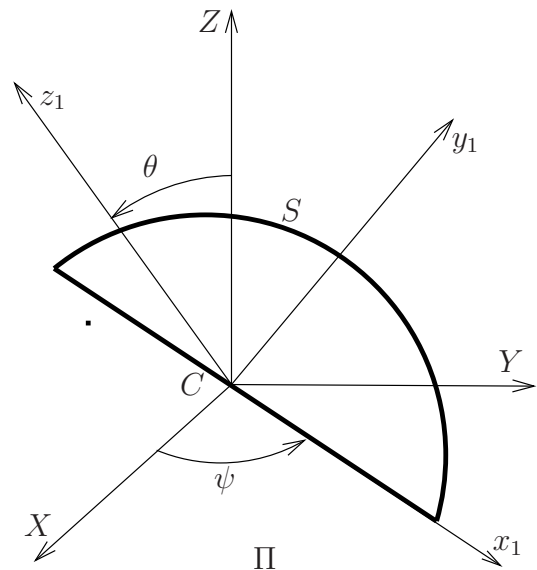
1. Tensor de inercia en el vértice.
2. Posición de su centro de masas.
3. Tensor central de inercia.
4. Relación entre  $R$  y  $h$  para que el tensor central sea esférico.
5. Determinar en éste último caso los ejes principales en cualquier punto del espacio.

★

42. Un sólido  $S$  está formado por una semicircunferencia de centro  $C$ , radio  $a$  y una barra de longitud  $2a$  coincidente con el diámetro. La densidad se considera uniforme, siendo  $m$  la masa del sólido  $S$ .

Se considera un sistema de referencia  $Cx_1y_1z_1$  ligado al sólido  $S$  de forma que  $Cx_1$  coincide con el diámetro y  $Cz_1$  es ortogonal al plano definido por  $S$ . Además se considera un sistema de referencia fijo  $CXYZ$  de manera que  $CX$  es una recta fija del plano horizontal fijo  $\Pi$  y  $CZ$  es ortogonal al mismo.

El movimiento del sólido  $S$  es tal que el diámetro desliza sin rozamiento sobre el plano  $\Pi$ , siendo el centro  $C$  un punto fijo de dicho plano. En estas condiciones el movimiento del sólido queda completamente definido por dos parámetros  $\psi$  y  $\theta$ .  $\psi$  es el ángulo formado por las rectas  $Cx_1$  y  $CX$  y  $\theta$  el ángulo formado por las rectas  $Cz_1$  y  $CZ$ .



Se pide:

1. Expresar el tensor de inercia del sólido  $S$  en el punto  $C$  referido al sistema de referencia  $Cx_1y_1z_1$ .
2. Expresar la velocidad angular del sólido  $S$  en función de  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$ .
3. Calcular  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  en función de  $\theta$  sabiendo que en el instante inicial el plano de  $S$  es vertical,  $\dot{\theta}_0 = \omega_1$  y  $\dot{\psi}_0 = \omega_0$ .
4. Calcular el módulo de la velocidad  $\dot{\theta}_f$  cuando el plano del sólido  $S$  coincide con  $\Pi$ .

(Examen Extraordinario, Septiembre 1997)

★

43. Sea  $I_O$  el tensor de inercia de un cubo homogéneo (de masa  $M$  y lado  $b$ ) respecto de uno de sus vértices  $O$ , expresado en unos ejes paralelos a las aristas.

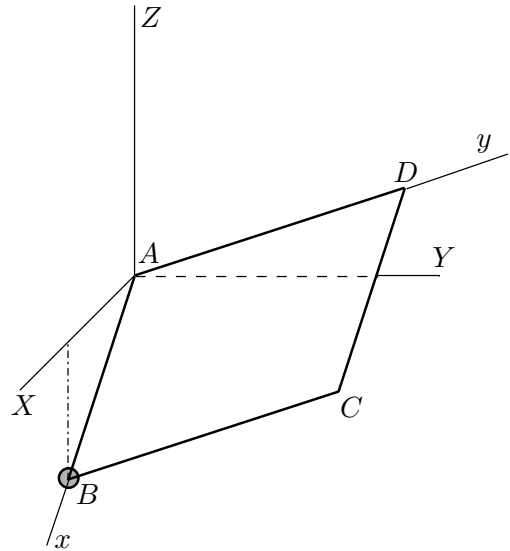
Diagonalizar  $I_O$  mediante la rotación del sistema de referencia.

★

44. Una placa cuadrada homogénea de lado  $a$  y masa  $m$  cae bajo la acción de la gravedad de forma que el vértice  $A$  permanece fijo y el vértice  $B$  siempre permanece en el plano vertical  $OXZ$ .

Se consideran dos sistemas de referencia: uno fijo  $(XYZ)$  y uno móvil solidario a la placa  $(xyz)$  de manera que en todo momento  $x$  coincide con la arista  $AB$  y el eje  $z$  es perpendicular al plano de la placa por  $A$ .

Se pide:



1. Calcular el tensor de inercia  $I_A$  expresando sus componentes en el triedro del cuerpo  $(xyz)$
2. Expresión de la velocidad angular  $\Omega$  de la placa en una posición genérica, referida a los ejes  $xyz$
3. Expresión del momento cinético  $H_A$  y de su derivada absoluta respecto del tiempo en una posición genérica, referidos a los ejes  $xyz$
4. Razonar sobre la existencia de integrales primeras del movimiento, escribiéndolas en el caso de que existan

(Problema puntuable, curso 02-03)

★