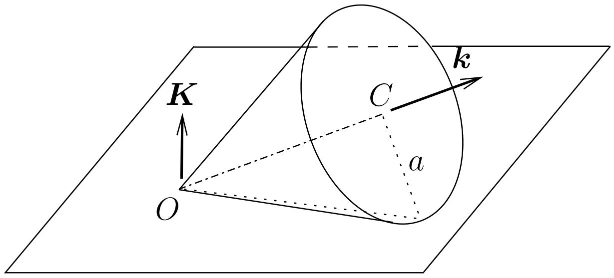
MECÁNICA

49. Se considera un cono de masa m, radio de la base a y semiángulo $\pi/6$ que permanece apoyado sobre un plano horizontal fijo y liso, de forma que puede pivotar y deslizar libremente, manteniéndose en contacto a través de una generatriz. En el instante inicial se impone al cono una rotación alrededor de su eje $(O, \boldsymbol{k})$ con velocidad ω_0. A su vez se imprime una velocidad de rotación al eje del cono alrededor de la vertical $\boldsymbol{K}$ de igual valor ω_0. Se pide:



1. Estudiar las integrales primeras que existan obteniendo la expresión de las mismas.

2. Obtener la reacción del plano sobre el cono (se trata de una fuerza distribuida sobre la generatriz, equivalente a su resultante aplicada en un determinado punto de la misma, lo que habrá que calcular).

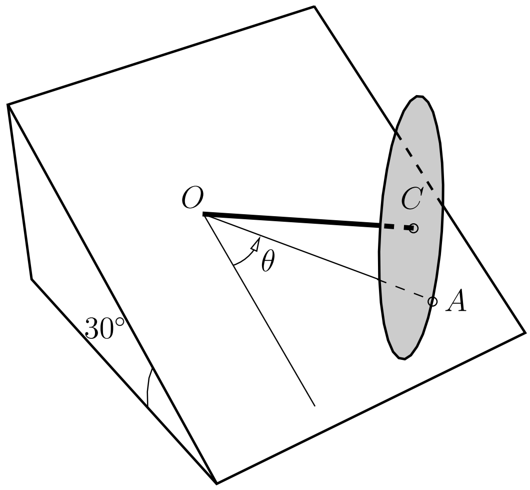
3. Obtener el valor de ω_0 que ocasionaría que el cono se levantase del plano por uno de los extremos de la generatriz de contacto. Interpretar cualitativamente el fenómeno mediante el efecto giroscópico, deduciendo cuál de los dos extremos se levantaría.

(Examen final, curso 2005/2006)

⋆

50. Un disco pesado, homogéneo de masa $m/2$ y radio a, tiene unida rígidamente y perpendicular a él una varilla OC de masa $m/2$ y longitud $a\sqrt{3}$ (véase la figura). El sólido descrito rueda sin deslizar sobre un plano inclinado 30º respecto al horizontal (tanto el extemo O de la varilla como el borde del disco se apoyan siempre sobre el plano).

Se pide:



1. Determinar el tensor de inercia del sólido en O. En función del ángulo θ que forma la proyección de la varilla sobre el plano con su dirección de máxima pendiente, obtener la expresión del momento cinético en O en un instante genérico.

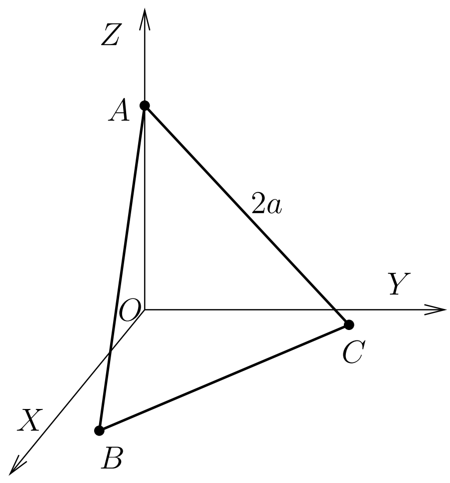
2. Ecuación de Lagrange correspondiente a θ.

3. Si inicialmente $\theta_0 = 0$, determinar la mínima velocidad angular $\dot{\theta}_0$ que hace que el sólido dé vueltas completas alrededor de O.

(Examen parcial, curso 2007/2008)

⋆

51. Una placa triangular homogénea ABC, equilátera de lado $2a$ y masa m, se mueve de forma que el vértice A permanece sobre el eje vertical fijo OZ, sin rozamiento. Además el lado BC permanece apoyado sobre el plano horizontal también liso OXY, siendo el movimiento de la placa el más general posible. Se pide:



1. Calcular el tensor central de inercia de la placa y expresión de la energía total en un instante genérico, en función de los grados de libertad y sus derivadas. (Se da el dato del momento de inercia de un triángulo respecto de uno de sus lados, $I = mh^2/6$, siendo m la masa y h la altura.)

2. Expresión del momento cinético del sólido respecto del eje OZ, en un instante genérico.

3. Discutir la existencia de integrales primeras y calcularlas en su caso, sabiendo que en el instante inicial la velocidad de A es nula, la velocidad de rotación alrededor del eje OZ vale ω_0 y el ángulo de la placa con el plano OXY es $\pi/3$. Calcular la velocidad del centro de masas G cuando la placa alcanza el plano horizontal.

4. Reacción en el vértice A y en el lado BC. Para este apartado se recomienda emplear coordenadas cilíndricas.

(Examen Parcial, curso 2008/2009)

———————————★———————————

52. Se considera una peonza simétrica pesada cuya forma es un cono de revolución con radio de la base b, altura $4b/3$ y masa m. Se pone en movimiento con su vértice Q sobre un plano horizontal OXY, comunicándose a dicho vértice una trayectoria impuesta sobre una circunferencia horizontal fija con centro en O y radio a, con velocidad angular ω_0 constante. Se pide:

1. Definir los grados de libertad del sistema y obtener en función de los mismos y sus derivadas la expresión del momento cinético del sólido en Q.

2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento.

3. Estudiar la posibilidad de un movimiento con velocidad de precesión constante ω_0 y nutación constante θ_0, estando inicialmente el eje del cono en el plano OXZ.

Nota: Los momentos de inercia principales de un cono de revolución sólido con base b y altura h en su centro de masa G son $I_{Gxx} = I_{Gyy} = \frac{3}{80}m(h^2 + 4b^2)$ e $I_{Gzz} = \frac{3}{10}mb^2$.

(Examen final, curso 2008/2009)

———————————★———————————