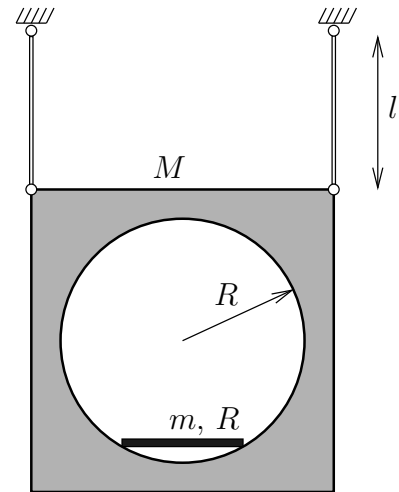


**37.** Una placa cuadrada de masa  $M$  está articulada por dos de sus vértices a sendos puntos fijos mediante dos varillas de longitud  $l$  y masa despreciable, permaneciendo en un plano vertical. La placa tiene en su centro un hueco de forma circular de radio  $R$ , por el que se mueve con ligadura bilateral lisa una varilla de masa  $m$  y longitud  $R$  (ver en la figura la posición del sistema en reposo).



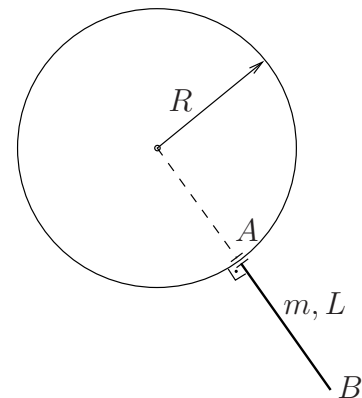
Asimismo sobre la placa se produce una resistencia viscosa del medio cuya resultante equivale a una fuerza proporcional a la velocidad de la placa aplicada en su centro, con constante  $c$ .

1. Ecuaciones diferenciales de la dinámica, suponiendo el movimiento más general posible.
2. Discutir la existencia de integrales primeras y, en su caso, expresarlas.

(Examen parcial, curso 2008/2009)

★

**38.** Una varilla  $AB$  pesada de masa  $m$  y longitud  $L$  se mueve de forma que uno de sus extremos  $A$  desliza sin rozamiento sobre una circunferencia vertical fija de radio  $R$ . Además la articulación en  $A$  es tal que hace que la varilla se mantenga siempre perpendicular a la circunferencia en dicho punto, como muestra la figura adjunta.



*Nota:* la posición genérica de la figura no muestra a la varilla en verdadera magnitud, ya que ésta se encuentra fuera del plano de la circunferencia.

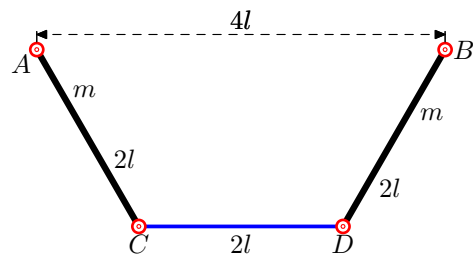
Se pide:

1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y, si procede, proporcionar una interpretación física de éstas;
2. Obtener las ecuaciones del movimiento de la varilla;
3. Obtener la componente perpendicular al plano de la circunferencia de la fuerza de reacción que ejerce la circunferencia sobre la varilla en  $A$ .

(Examen final, curso 2008/2009)

★

**39.** Un sistema está formado por dos varillas de masa  $m$  y longitud  $2l$ , unidas mediante articulaciones a dos puntos fijos  $A$  y  $B$ , situados en la misma horizontal y distantes  $4l$ . Los extremos opuestos están unidos entre sí mediante una varilla inextensible sin masa de longitud  $2l$  que se articula en sus extremos. El movimiento tiene lugar en un plano vertical. Considerando la restricción correspondiente a la varilla sin masa mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange, se pide:



1. Coordenadas generalizadas, expresión de la restricción y grados de libertad del sistema.
2. Obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento.
3. Obtener el valor del esfuerzo en la varilla de unión en función de las coordenadas y sus derivadas. Calcular igualmente la reacción en A.

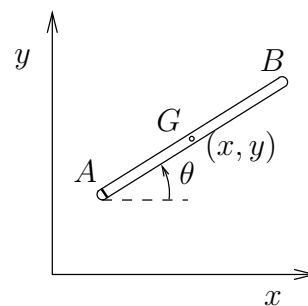
*(Examen Parcial y final, curso 2006/2007)*

★

**40.** Una barra homogénea  $AB$  de masa  $m$  y longitud  $l$  se mueve en un plano horizontal. En el extremo  $A$  tiene un apoyo en forma de pequeña cuchilla, que impide el movimiento de dicho punto en dirección paralela a la varilla.

Se pide:

1. Expresar la ecuación de ligadura anholónoma.
2. Usando  $(x, y, \theta)$  como coordenadas, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento. Emplear para ello el formalismo de la dinámica analítica, haciendo uso de la técnica de multiplicadores de Lagrange para eliminar la citada ligadura.
3. Demostrar que el multiplicador de Lagrange  $\lambda$  representa la fuerza transversal de restricción en ese punto.
4. Integrar completamente las ecuaciones, suponiendo que en el instante inicial es  $(x, y, \theta) = (0, 0, 0)$  y que el centro de la varilla tiene una velocidad  $v_0$ .



*(Basado en ejercicio 3º, examen parcial y final, curso 1998-99)*

★