**Práctica nº 12** curso 2008-2009

# MECÁNICA

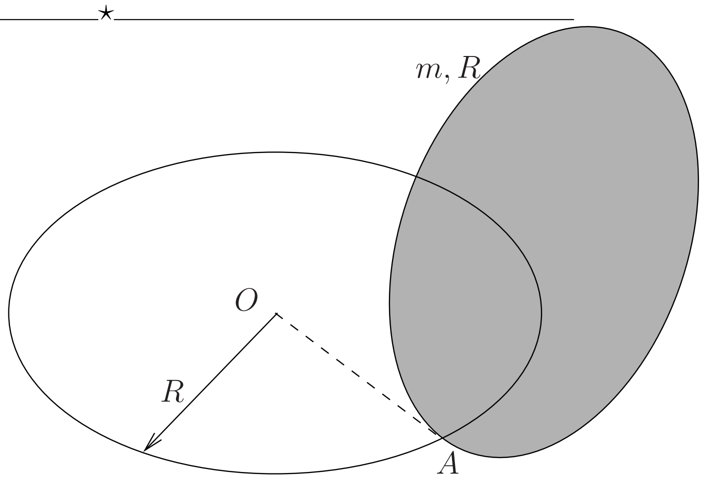
**45.** Sea un sólido rígido $\mathcal{B}$ con un punto fijo $O$ y un triedro cartesiano $Oxyz$ fijo. Se producen dos rotaciones consecutivas de $\mathcal{B}$, la primera un ángulo $\alpha$ alrededor del eje $Oz$, y la segunda un ángulo $\beta$ alrededor del nuevo eje $Ox'$ (resultado del primer giro sobre el eje $Ox$. Se pide:

1. Obtener la expresión matricial que relaciona las coordenadas de un punto en la configuración final, $(x, y, z)^T$, con las coordenadas iniciales del mismo punto, $(x^o, y^o, z^o)^T$.
2. Emplear esta expresión para deducir la relación entre las componentes del tensor de inercia en la base $Oxyz$ entre ambas configuraciones.
3. Para el caso en que $\alpha = 90°$ y $\beta = 90°$, calcular el eje $\boldsymbol{p}$ alrededor del cual se puede considerar que ha girado el sólido al moverse desde la configuración inicial a la final, calculando también la magnitud de este giro ($\varphi$).

   Comprobar que a partir de $\boldsymbol{p}$ y $\varphi$ se obtiene la matriz de rotación calculada en el apartado (1) aplicando la fórmula de Rodrigues.
4. Suponiendo $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ funciones dadas del tiempo, calcular a partir de la matriz de rotación la velocidad angular del sólido, y expresar sus coordenadas tanto en el triedro del cuerpo como en el fijo para unos valores $(\alpha, \beta)$ genéricos.

---

**46.** Un punto $A$ del borde de un disco homogéneo pesado de masa $m$ y radio $R$ está obligado a moverse en una circunferencia horizontal fija y lisa de centro $O$ y radio $R$. La ligadura en el punto $A$ es una articulación que permite al disco girar libremente alrededor del radio $OA$ manteniéndose en todo instante perpendicular a dicho radio.



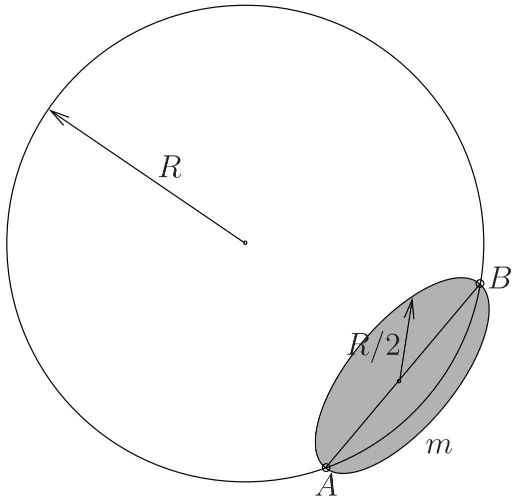

Se pide:

1. Obtener la expresión de la velocidad de rotación del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas;
2. Obtener las ecuaciones del movimiento del disco mediante la aplicación de los principios de Newton-Euler;
3. Obtener el momento que la articulación $A$ debe ejercer sobre el disco para que éste permanezca vertical;

*(Examen final, Curso 07/08)*

---

**47.** Un disco pesado de masa $m$ y diámetro $R$ se mueve de forma que los extremos de uno de sus diámetros $AB$ deslizan sobre una circunferencia vertical fija y lisa de radio $R$. El disco puede además girar libremente alrededor de este diámetro $AB$. Se pide:




1. Expresión de la velocidad de rotación del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas;

2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del disco y obtenerlas en su caso;

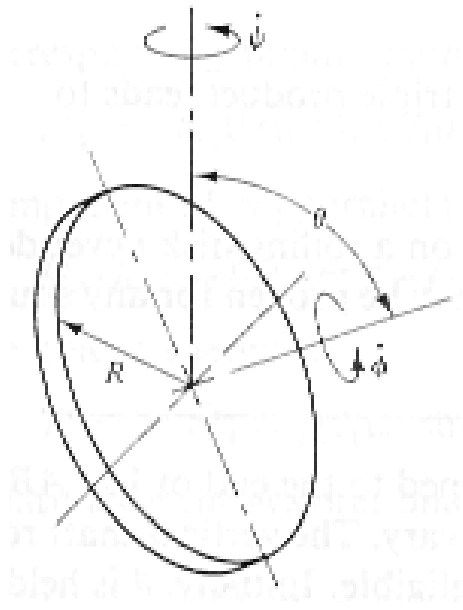
3. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas;

4. Obtener las reacciones sobre el disco en $A$ y $B$ normales al plano del aro.

*(Examen Final, Curso 07/08)*

———————★———————

**48.** Una moneda de masa $M$ y radio $R$ rueda sin deslizar sobre una mesa horizontal fija. Para describir su movimiento se emplearán como coordenadas generalizadas las tres coordenadas cartesianas del centro del disco $(x, y, z)$, el ángulo $\psi$ girado alrededor de un eje vertical, el ángulo $\phi$ girado alrededor del eje de revolución, y el ángulo $\theta$ de máxima pendiente con la horizontal. Obtener las ecuaciones del movimiento mediante la aplicación de los principios de Newton-Euler.




———★———