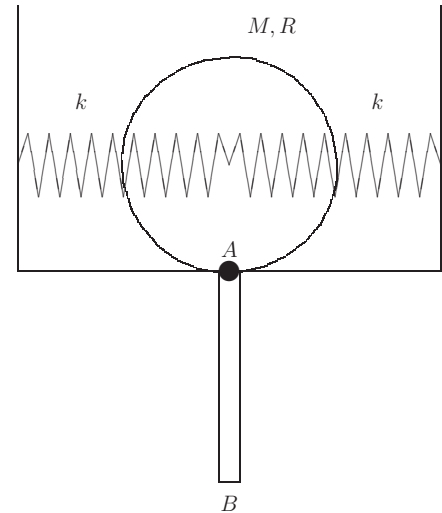


81. En el sistema de la figura, el disco de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre el suelo horizontal, sometido a la acción de dos resortes de rigidez k y longitud natural l_0 . A su vez, en el punto A va articulada una varilla AB de longitud $2R$ y masa M .

Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización para pequeñas oscilaciones.
3. Si $k = Mg/R$, obtener las frecuencias propias y los modos normales de oscilación.



★

82. El sistema material de la figura, situado en un plano vertical, está constituido por la varilla rectilínea AB , homogénea y pesada, de masa m y longitud a , y por un disco homogéneo y pesado de centro G , con masa m y radio R .

Los extremos C y D de dos varillas iguales AC y BD , sin masa y de longitud a , se articulan en dos puntos fijos del plano vertical situados sobre una misma horizontal a distancia a , mientras que los otros extremos A y B se articulan en los extremos de la varilla AB .

Una varilla EF sin masa, de longitud R , se une rígidamente al punto medio F de AB .

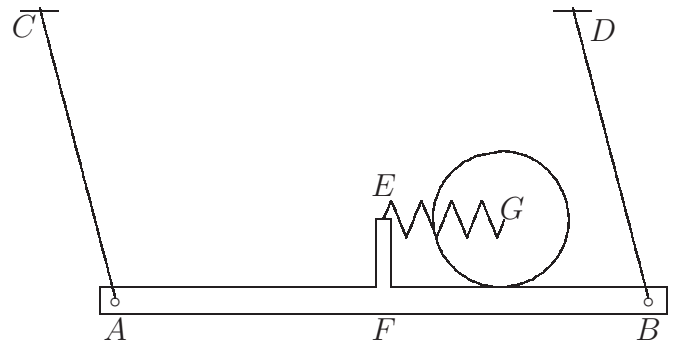
Los extremos de un muelle de longitud natural cero y constante de rigidez k se unen a los puntos E y G .

El sistema se mueve en el plano vertical, girando las varillas AC y BD alrededor de C y D respectivamente y rodando sin deslizar el disco sobre la varilla AB .

Se pide:

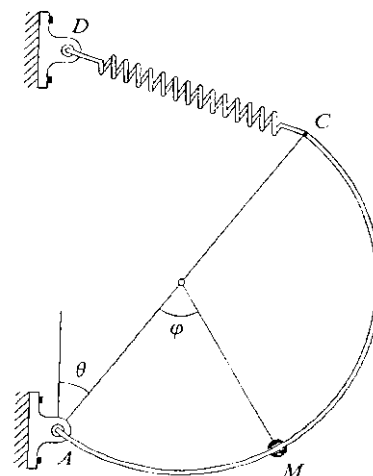
1. Calcular la energía cinética del sistema.
2. Calcular la energía potencial del sistema.
3. Plantear las ecuaciones que determinan el movimiento del sistema.
4. Estudiar los pequeños movimientos del sistema alrededor de la posición de equilibrio estable.

★



83. El sistema material de la figura, contenido en un plano vertical, está constituido por un semicirculo circular, homogéneo y pesado, de masa m y radio a , uno de cuyos extremos A está articulado en un punto fijo, mientras que su otro extremo C está unido mediante un muelle de longitud natural nula y constante $k = mg/2a$, dirigido al punto fijo D situado en la vertical de A y a una distancia $AD = 2a$ del punto fijo A .

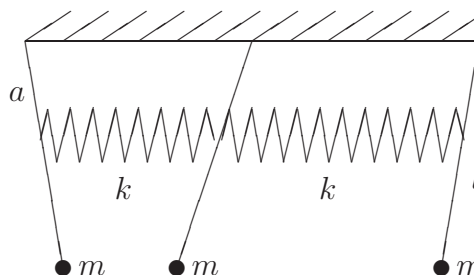
Sobre el semicirculo puede deslizarse sin rozamiento una partícula material pesada M de la misma masa m que aquél. Se pide:



1. Determinar la energía cinética del sistema.
2. Determinar la función de fuerzas de la que derivan las fuerzas directamente aplicadas.
3. Plantear las ecuaciones que determinan el movimiento del sistema.
4. Determinar las posiciones de equilibrio del sistema.
5. Estudiar los pequeños movimientos del sistema alrededor de la posición de equilibrio estable.

★

84. Un conjunto de 3 péndulos simples iguales, de longitud l y masa puntual m cada uno, oscilan en un plano vertical. Se hallan sujetos entre sí por 2 resortes iguales de constante k cada uno, en dirección horizontal y a una altura a por debajo del punto de suspensión, de forma que en la posición de equilibrio no ejercen fuerza alguna.



Se pide:

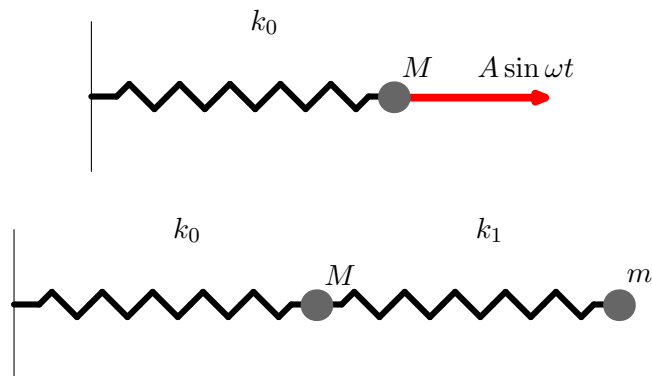
- a. Ecuaciones del movimiento y su linealización para pequeñas oscilaciones.
- b. Frecuencias y modos propios de vibración del sistema.
- c. Expresión de las coordenadas normales.
- d. Integración de las ecuaciones para las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{aligned}
 (\theta_1)_0 &= (\theta_2)_0 = (\theta_3)_0 = 0 \\
 (\dot{\theta}_1)_0 &= 2; (\dot{\theta}_2)_0 = 1; (\dot{\theta}_3)_0 = 0
 \end{aligned}$$

★

85. Se dispone de un muelle de constante k_0 unido a una masa de valor M sobre la que se aplica una fuerza de valor $A \sin(\omega t)$ tal que el sistema entra en resonancia.

Se desea eliminar la resonancia añadiendo en serie una nueva masa (m) unida con un muelle (k_1).



Considerando que existe un pequeño amortiguamiento inevitable y que se alcanza el régimen permanente, se pide:

1. Valores de k_1 y m para minimizar el movimiento de M . Interpretación física del resultado.
2. Valores de k_1 y m que minimicen el movimiento de M y que limiten el movimiento de la masa añadida a $\frac{A}{k_0}$.

★