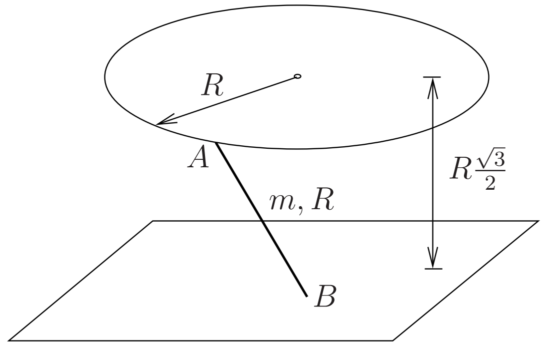
MECÁNICA

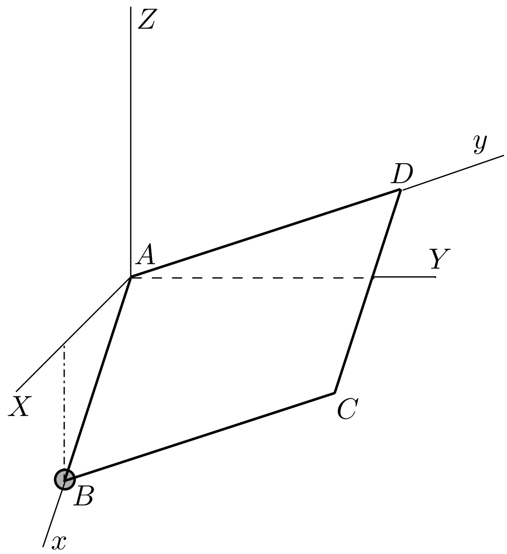


56. Una varilla homogénea pesada AB de longitud R y masa m se mueve de forma que uno de sus extremos A desliza sobre una circunferencia horizontal fija y lisa de radio R, y el otro extremo B desliza sobre un plano horizontal fijo y liso situado a una distancia $R\sqrt{3}/2$ debajo de la circunferencia.
Se pide:

1. Expresión de la velocidad angular de la varilla;
2. Discutir y si procede calcular las posibles integrales primeras del movimiento de la varilla mediante los principios generales de Newton-Euler;

(Examen final, curso 2005-06)

⋆



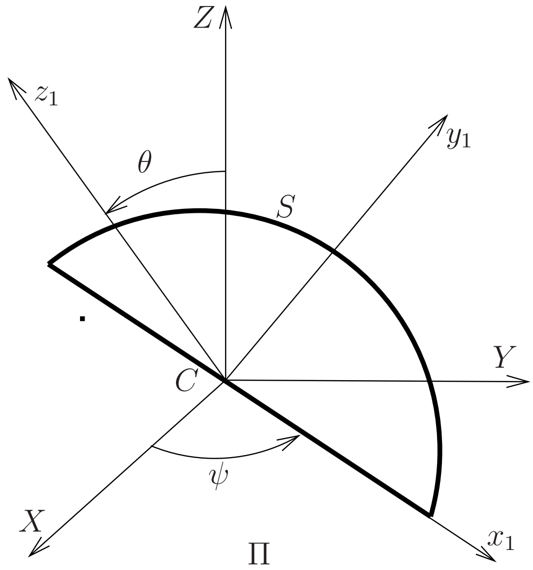
57. Una placa cuadrada homogénea de lado a y masa m cae bajo la acción de la gravedad de forma que el vertice A permanece fijo y el vértice B siempre permanece en el plano vertical OXZ.
Se consideran dos sistemas de referencia: uno fijo (XYZ) y uno móvil solidario a la placa (xyz) de manera que en todo momento x coincide con la arista AB y el eje z es perpendicular al plano de la placa por A.
Se pide:

1. Calcular el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_A$ expresando sus componentes en el triedro del cuerpo (xyz)
2. Expresión de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de la placa en una posición genérica, referida a los ejes xyz
3. Expresión del momento cinético $\boldsymbol{H}_A$ y de su derivada absoluta respecto del tiempo en una posición genérica, referidos a los ejes xyz
4. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
5. Razonar sobre la existencia de integrales primeras del movimiento, escribiéndolas en el caso de que existan

(Problema puntuable, curso 02-03)

⋆

58. Un sólido S está formado por una semicircunferencia de centro C, radio a y una barra de longitud $2a$ coincidente con el diámetro. La densidad se considera uniforme, siendo m la masa del sólido S.
Se considera un sistema de referencia $Cx_1y_1z_1$ ligado al sólido S de forma que Cx_1 coincide con el diámetro y Cz_1 es ortogonal al plano definido por S. Además se considera un sistema de referencia fijo $CXYZ$ de manera que CX es una recta fija del plano horizontal fijo Π y CZ es ortogonal al mismo.
El movimiento del sólido S es tal que el diámetro desliza sin rozamiento sobre el plano Π, siendo el centro C un punto fijo de dicho plano. En estas condiciones el movimiento del sólido queda completamente definido por dos parámetros ψ y θ. ψ es el ángulo formado por las rectas Cx_1 y CX y θ el ángulo formado por las rectas Cz_1 y CZ.



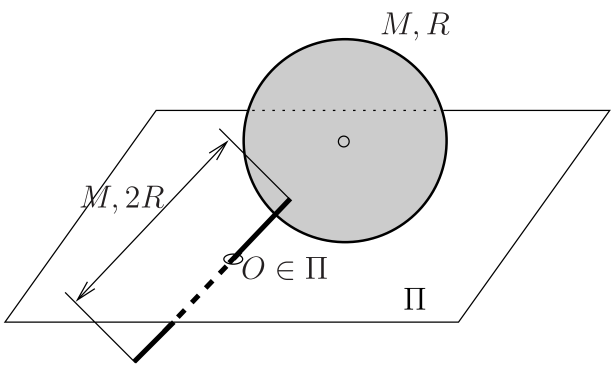
Se pide:

1. Expresar el tensor de inercia del sólido S en el punto C referido al sistema de referencia $Cx_1y_1z_1$.
2. Expresar la velocidad angular del sólido S en función de $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$.
3. Calcular $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ en función de θ sabiendo que en el instante inicial el plano de S es vertical, $\dot{\theta}_o = \omega_1$ y $\dot{\psi}_o = \omega_0$.
4. Calcular el módulo de la velocidad $\dot{\theta}_f$ cuando el plano del sólido S coincide con Π.

(Examen final, curso 1996-97)

---

59. Un sólido rígido está formado por una esfera sólida de masa M y radio R y una barra de masa M y longitud $2R$, soldada por un extremo a la esfera en un punto de su superficie en dirección normal a la misma. La esfera se mueve apoyada en todo momento sobre un plano horizontal liso fijo Π, y la barra atraviesa el plano por un pequeño agujero también liso, de forma que puede entrar y salir libremente a través del mismo. Se supondrá que la barra no llega a lo largo del movimiento a salir totalmente del agujero. Se pide:



1. Expresar el tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ en ejes principales;
2. Definir claramente los grados de libertad del sistema;
3. Expresión del momento cinético del sólido en el centro de masa;

4. Expresión del momento cinético del sólido en el punto O, situado en el agujero;

5. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sólido.

(Examen final, curso 2000-01)

———————————★———————————

60. Sea un sólido rígido $\mathcal{B}$ con un punto fijo O y un triedro cartesiano $Oxyz$ fijo. Se producen dos rotaciones consecutivas de $\mathcal{B}$, la primera un ángulo α alrededor del eje Oz, y la segunda un ángulo β alrededor del nuevo eje Ox' (resultado del primer giro sobre el eje Ox. Se pide:

1. Obtener la expresión matricial que relaciona las coordenadas de un punto en la configuración final, $(x, y, z)^T$, con las coordenadas iniciales del mismo punto, $(x^o, y^o, z^o)^T$.

2. Emplear esta expresión para deducir la relación entre las componentes del tensor de inercia en la base $Oxyz$ entre ambas configuraciones.

3. Para el caso en que $\alpha = 90°$ y $\beta = 45°$, calcular el eje $\boldsymbol{p}$ alrededor del cual se puede considerar que ha girado el sólido al moverse desde la configuración inicial a la final, calculando también la magnitud de este giro (φ).

   Comprobar que a partir de $\boldsymbol{p}$ y φ se obtiene la matriz de rotación calculada en el apartado (1) aplicando la fórmula de Rodrigues.

4. Suponiendo $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ funciones dadas del tiempo, calcular a partir de la matriz de rotación la velocidad angular del sólido, y expresar sus coordenadas tanto en el triedro del cuerpo como en el fijo para unos valores (α, β) genéricos.

———————————★———————————