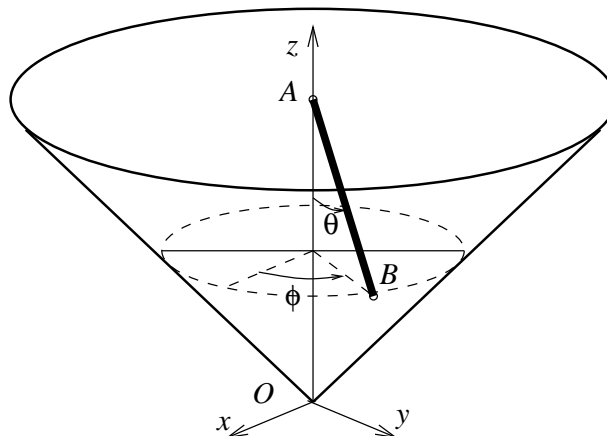


61. Se considera una varilla  $AB$  rígida de masa  $m$  y longitud  $\ell$ . El punto  $A$  se mueve sobre el eje  $Oz$  vertical, mientras que  $B$  permanece sobre un cono fijo de eje  $Oz$  y semiángulo  $\pi/4$ , siendo ambas ligaduras lisas y bilaterales. Para estudiar el movimiento se considerarán las coordenadas  $(\phi, \theta)$  de la figura adjunta, tomando como condiciones iniciales  $(\phi_0 = 0, \theta_0, \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0 = 0)$ .



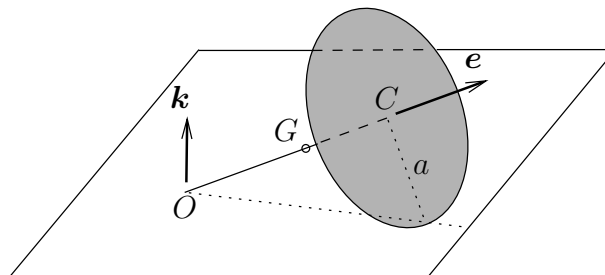
Se pide:

1. Obtener las ecuaciones de la dinámica que expresan el balance del momento cinético en  $O$  del sistema. Estudiar si se conserva la proyección del mismo respecto de algún eje.
2. Obtener la expresión de la reacción del cono sobre  $B$  en función de los grados de libertad y sus derivadas.
3. Razonar si se conserva la energía y obtener en su caso la expresión de la misma.

(Examen final, 25/01/2005)



62. Un disco pesado, homogéneo de masa  $m/2$  y radio  $a$ , tiene unida rígidamente y perpendicular a él una varilla  $OC$  de masa  $m/2$  y longitud  $a\sqrt{3}$  (ver figura). El sólido descrito rueda, pivota y desliza sobre un plano horizontal y liso, manteniéndose en todo momento en contacto con el mismo (tanto el extremo  $O$  de la varilla como el borde del disco apoyan siempre sobre el plano).



En el instante inicial se le comunica al sólido un movimiento tal que el centro de masas  $G$  tiene velocidad  $v_0$  perpendicular a la varilla, y el vector velocidad angular vale:  $\Omega_0 = \omega_0(\mathbf{K} + \mathbf{e})$ , siendo  $\mathbf{K}$  el versor vertical y  $\mathbf{e}$  el versor según la varilla. Se pide:

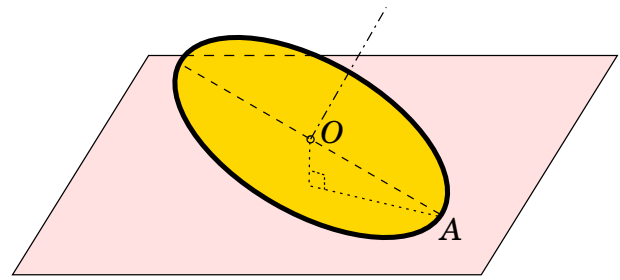
1. Justificar adecuadamente si se cumple o no la constancia del momento cinético respecto de  $G$ , o respecto de alguna recta que pase por  $G$ ;
2. Obtener las reacciones del plano sobre el sólido;
3. Relación entre  $v_0$  y  $\omega_0$  para que  $O$  describa una cicloide, definiendo claramente dicha curva.

NOTA: Se denomina cicloide a la curva plana descrita por un punto de una circunferencia al rodar sin deslizar sobre una recta.

(Examen final, 6/09/2004)



**63.** Un disco circular pesado, de masa  $M$  y radio  $R$ , se mueve con el borde apoyado sobre un plano horizontal liso, sobre el cual puede deslizarse libremente. Se pide:

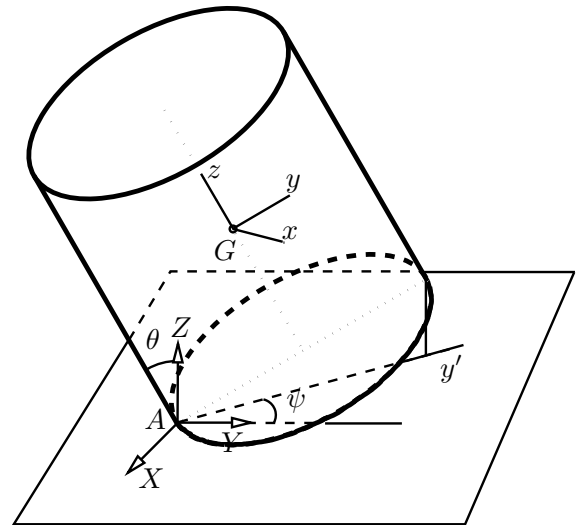


1. Tensor de inercia en el centro del disco  $O$ , escogiendo unos ejes adecuados para expresar las componentes.
2. Grados de libertad del sistema, definiendo claramente los parámetros escogidos para representarlos.
3. Momento de las fuerzas en  $O$  para una posición arbitraria, considerando un valor genérico de la reacción en el punto de contacto  $A$ .
4. Expresiones de la velocidad angular del disco y del momento cinético en  $O$ .
5. Ecuaciones de Euler de la dinámica del disco, junto con otras ecuaciones que fueran precisas para resolver completamente el sistema y calcular la reacción en  $A$ .
6. Integrales primeras. Dejar el movimiento reducido a cuadraturas.

(Examen parcial, 29/03/2003)

\*

**64** Un cilindro macizo de masa  $M$ , radio  $R$  y altura  $3R$  se mueve con el borde de su base inferior apoyado sobre un plano horizontal liso, deslizando libremente. Se consideran el triedro de direcciones fijas  $AXYZ$  ( $A$  es el punto de contacto,  $X, Y$  pertenecen al plano horizontal, y  $Z$  es vertical) y el triedro móvil  $Gxyz$  ( $G$  es el centro,  $y$  según el diámetro de máxima pendiente,  $x$  según un diámetro horizontal y  $z$  según el eje de revolución del cilindro). La orientación de este triedro se realiza con los ángulos  $\psi = \angle(AYy')$  y  $\theta = \angle(AZz)$ , ( $y'$  es la proyección sobre el plano horizontal del diámetro de máxima pendiente). Se pide:

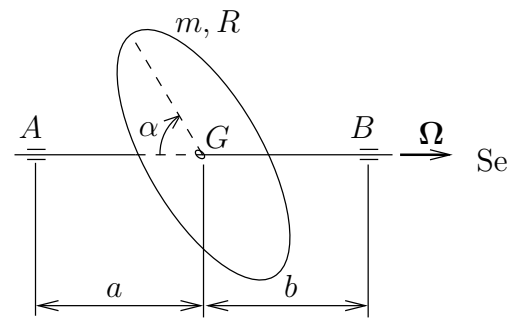


1. Tensor de inercia en  $G$ , expresando sus componentes en los ejes  $xyz$ . ¿Son constantes?.
2. Número de grados de libertad del sistema y definir claramente los parámetros escogidos para representar dichos grados de libertad.
3. Momento de las fuerzas en  $G$  en una posición genérica, considerando un valor genérico de la reacción en  $A$ .
4. Vector velocidad angular del cilindro expresado en el triedro  $Gxyz$ .
5. Ecuaciones dinámicas del movimiento.
6. Integrales primeras. Dejar el movimiento reducido a una cuadratura.

(Examen parcial, 6/04/2002)

★

65. Un disco pesado circular y homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$  gira con velocidad angular constante  $\Omega$  alrededor de un eje horizontal de masa despreciable al que está soldado y que pasa por su centro de gravedad  $G$ . El plano del disco forma en todo momento un ángulo  $\alpha$  constante con el eje, que se encuentra apoyado en sendos cojinetes lisos  $A$  y  $B$  situados a distancias  $a$  y  $b$  de  $G$  respectivamente.



pide:

1. Expresión del momento cinético del disco respecto de su centro  $\mathbf{H}_G$ ;
2. Expresión de la derivada de  $\mathbf{H}_G$  respecto del tiempo;
3. Expresión del momento en  $G$  de las fuerzas ejercidas sobre el conjunto formado por el disco y el eje;
4. Expresiones obtenidas de la aplicación del principio de cantidad de movimiento al sistema formado por el disco y el eje;
5. Expresión de las reacciones de los cojinetes sobre el eje en un instante genérico.

Problema puntuable, 12/03/2003)

★