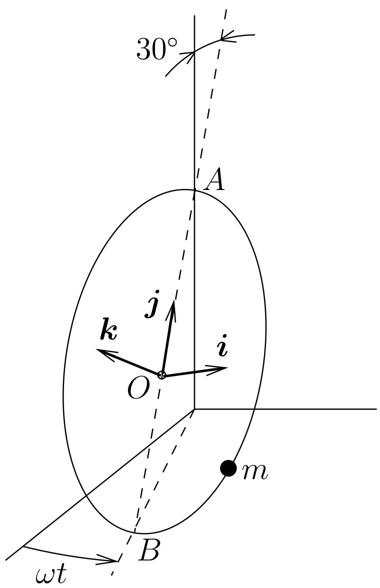
46. Un aro de radio R se mueve de forma que uno de sus diámetros AB gira alrededor de la vertical con velocidad angular ω constante, siendo el punto A fijo. Además el plano del aro forma en todo momento un ángulo de 30° con la vertical. Una partícula pesada de masa m puede moverse con ligadura bilateral sobre el aro sin que exista fricción.



Por conveniencia se considera un sistema móvil auxiliar ligado al aro $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, siendo O el centro del aro, $\boldsymbol{i}$ un versor horizontal, $\boldsymbol{j}$ un versor según OA y $\boldsymbol{k}$ perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas. Se pide:

1. Expresiones de la energía cinética y potencial de la partícula en función de los grados de libertad del sistema y sus derivadas;

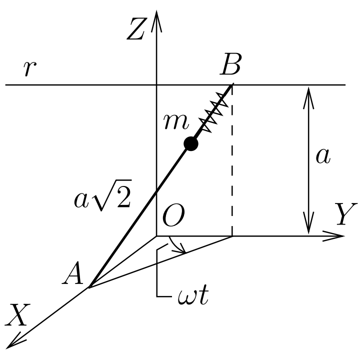
2. Obtener mediante el formalismo lagrangiano la ecuación diferencial del movimiento de la partícula en el aro;

3. Discutir, y en su caso expresar, alguna posible integral primera del movimiento, proporcionando además su interpretación física.

(Problema puntuable, 14/01/2004)

---

47. Una varilla AB sin masa y longitud $a\sqrt{2}$ se mueve de forma que su extremo A desliza sobre el eje OX y el otro extremo B sobre una recta horizontal r que se encuentra en el plano OYZ a una altura a. A su vez, una partícula pesada de masa m se mueve en todo momento a lo largo de la varilla con ligadura bilateral lisa unida al extremo B a través de un resorte de constante k y longitud natural nula.



La varilla tiene un movimiento impuesto tal que en un instante genérico el ángulo entre su proyección horizontal y el eje OY vale ωt, tal y como muestra la figura adjunta.

Se supone que no existe rozamiento entre ninguno de los elementos móviles del sistema, y que la partícula nunca alcanza ninguno de los dos extremos de la varilla durante el movimiento. Se pide:

1. Ecuación diferencial del movimiento de la partícula relativo a la varilla AB.

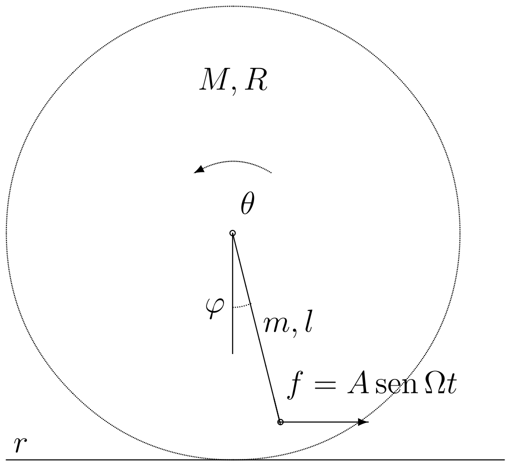
2. Determinar el valor mínimo de k para que este movimiento sea oscilatorio.

3. Expresión de la reacción de la varilla sobre la partícula en un instante genérico.

(Examen parcial 23/11/2002)

---

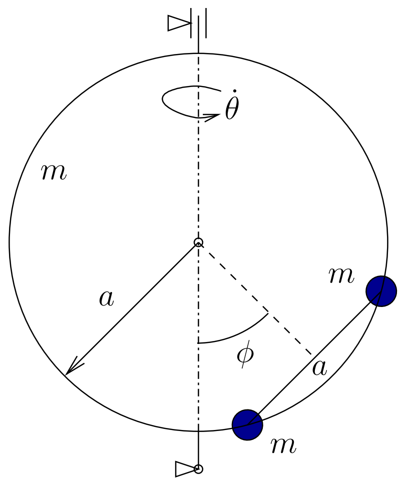
48. Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta r, manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa m y longitud $l < R$. En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor $f = A \operatorname{sen} \Omega t$. El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Se pide:



1. Tomando como coordenadas el giro del disco θ y el ángulo de la varilla con la vertical φ, expresar el trabajo δW para un desplazamiento virtual arbitrario.
2. Fuerzas generalizadas según las coordenadas anteriores.
3. Ecuaciones de Lagrange del movimiento.
4. Discutir la existencia o no de integrales primeras y obtenerlas en su caso.
5. Reacción tangencial de la recta sobre el disco, empleando multiplicadores de Lagrange.

⋆

49. El sistema de la figura consta de dos masas puntuales m, unidas por una varilla rígida y sin masa de longitud a, y ensartadas con ligadura bilateral lisa en un aro de radio a y masa m. El aro tiene un diámetro vertical que permanece fijo, pudiendo girar alrededor del mismo. Se pide:

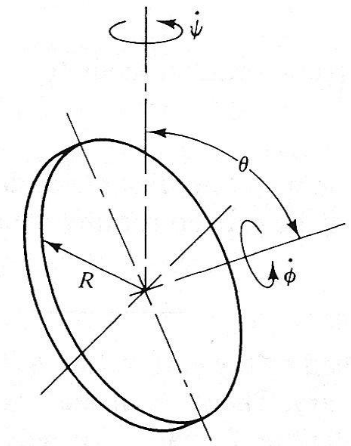


1. En la hipótesis de que el giro $\dot{\theta}$ alrededor del eje vertical sea libre: a) Ecuaciones diferenciales del movimiento y b) integrales primeras, caso de haberlas.
2. En la hipótesis de que el aro tenga una velocidad impuesta constante $\dot{\theta} = \omega$, a) ecuación diferencial del movimiento relativo al aro, b) valor de ω para que exista una posición de equilibrio relativo para $\phi = 30°$, y c) discutir la conservación de la energía y la existencia de integrales primeras.

(Examen parcial 22/01/2002)

⋆

50. Una moneda pesada de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una mesa horizontal fija. Se desea emplear como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas del centro de la moneda (x, y, z), el ángulo ψ girado alrededor de un eje vertical, el ángulo ϕ girado alrededor del eje de revolución de la moneda, y la máxima pendiente θ. Se pide:



1. Expresar las condiciones de ligadura existentes, clasificándolas como holónomas o anholónomas. Indicar el número de grados de libertad del sistema, y razonar si es o no conservativo.

2. En función de una función genérica (T) de energía cinética, expresar las ecuaciones de Lagrange, identificando las reacciones provenientes de los enlaces anholónomos.

NOTA: aunque no se pide en este ejercicio, para calcular la energía cinética, se podría emplear la expresión

$$T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_t\omega_t^2 + \frac{1}{2}I_n\omega_n^2,$$

siendo v_G la velocidad del centro de la moneda, ω_t la componente de la velocidad de rotación en el plano del disco, I_t el momento de inercia respecto a un díametro cualquiera, ω_n la velocidad de rotación según el eje normal al disco e I_n el momento de inercia respecto a este eje. La justificación de esta expresión se estudiará más adelante, con la dinámica del sólido rígido 3D.