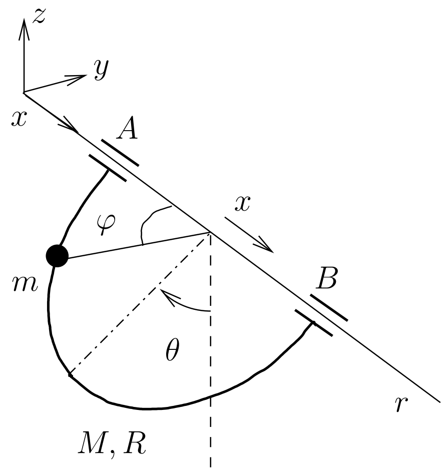
MECÁNICA

Práctica nº 1 curso 2004-2005

1. Un semiaro de radio R desliza a lo largo de una recta horizontal fija r por su diámetro AB con velocidad constante y además gira alrededor de éste con velocidad de rotación constante $\dot{\theta} = \omega$. Ensartada en el semiaro se mueve sin rozamiento una partícula pesada de masa m. Se pide:

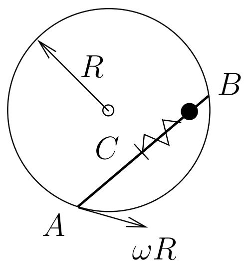


1. Ecuación diferencial del movimiento de la partícula respecto del aro.

2. Expresión de la reacción que ejerce el aro sobre la partícula en un instante genérico.

(Examen Final modificado, Curso 98/99)

2. Una partícula pesada de masa m se mueve en todo momento sobre una varilla AB de longitud $R\sqrt{3}$. Los extremos de A y B de la varilla recorren una circunferencia vertical fija de radio R con velocidad $v_A = v_B = \omega R$. Además, entre la partícula y el punto medio de la varilla (C) existe un resorte de longitud natural nula y constante k. En el instante inicial la varilla se encuentra en posición horizontal, y la partícula se encuentra en el punto C en reposo respecto de la la varilla.



Se pide:

1. Expresar las ecuaciones del movimiento de la partícula.

2. Valor mínimo de k para que el movimiento de la partícula sea de tipo oscilatorio.

3. Expresión de la reacción de la varilla sobre la partícula.

4. Calcular el trabajo de la reacción sobre la partícula entre $t = 0$ y un instante genérico.

(Problema puntuable, curso 98/99)

3. Un punto material M, de masa m, se mueve sin rozamiento con enlace bilateral sobre una curva situada en un plano horizontal. Dicha curva se puede expresar en coordenadas polares mediante la ecuación $\rho = \dfrac{a}{2}(1 + \cos\theta)$, correspondiente a la ecuación de una cardioide. Sobre dicho punto material se encuentra aplicada una fuerza $\boldsymbol{F}$ de valor $\boldsymbol{F} = 2mk^2a\boldsymbol{u}_\rho$ donde k es una constante positiva y $\boldsymbol{u}_\rho$ un vector unitario en la dirección de OM. En el instante inicial se encuentra en $M_0(\rho_0, \theta_0)$ con velocidad inicial nula.

Se pide:

1. Razonar la existencia de integrales primeras y expresarlas en su caso, demostrando que el módulo de la velocidad v de M se puede expresar como:

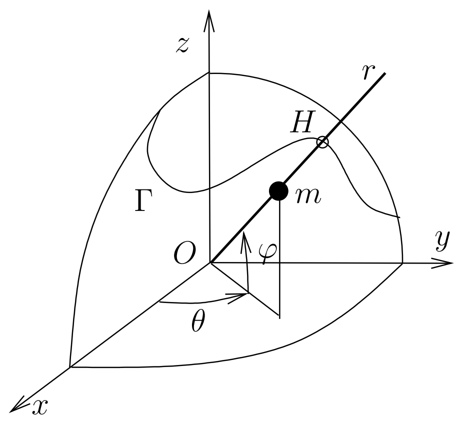
$$v^2 = 4ak^2(\rho - \rho_0)$$

2. Integrar la ecuación diferencial, para ello efectuar el cambio de variables $u = \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$.

3. Para las condiciones iniciales dadas calcular el tiempo que tarda en volver a la posición inicial. Calcular dicho tiempo si parte del punto M_0 definido para $\theta = 2\theta_0$.

(Problema puntuable, curso 02/03)

4. Una recta r tiene un punto O fijo, que se toma como origen de referencia del triedro trirrectángulo $Oxyz$ de modo que Oz coincide con la vertical ascendente. La recta r se mueve de forma que un punto dado H de la misma recorre, con velocidad constante y de valor $a\omega$, una determinada curva Γ sobre la superficie esférica de centro O y radio a. (podrá suponerse esta curva definida, de forma genérica, por sus coordenadas esféricas $r = a$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$). A su vez, una partícula pesada de masa m se mueve sin rozamiento sobre dicha recta r.



Se pide:

1. Obtener la ecuación diferencial del movimiento de la partícula sobre la recta r.

2. Consideramos ahora el caso particular en que la curva Γ es una circunferencia situada en el plano $z = a\sqrt{3}/2$.

   Asimismo, en el instante inicial la partícula se encuentra situada a una distancia r_0 del origen y animada de una velocidad, respecto a la recta r, de valor $b\omega$.

   Determinar el movimiento, relativo a r, de la partícula (integrando la ecuación diferencial del movimiento).

   ¿Qué relación deben satisfacer las condiciones iniciales para que el movimiento se mantenga acotado en el transcurso del tiempo?

3. Bajo el mismo supuesto del apartado anterior y suponiendo que las condiciones iniciales satisfagan la relación pedida, obtener la reacción de la recta r sobre la partícula, especificando el valor asintótico al que tiende.

(Examen Extraordinario, septiembre 1999)

5. Una partícula material pesada M, de masa m, se mueve sobre una hélice cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\,\mathrm{sen}\theta \\ z &= R\theta \end{aligned}$$

Sobre el punto actúa además de la gravedad una fuerza de resistencia proporcional y opuesta a la velocidad tal que cuando la velocidad del punto es $\sqrt{gR}$, la fuerza de resistencia es igual al peso mg de la partícula.

En el instante inicial ($t = 0$) la partícula se encuentra en la posición definida por las coordenadas (R,0,0) y se lanza con una velocidad $V_o\sqrt{2}/2(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

Se pide:

1. Demostrar que existe un valor de la velocidad inicial V_o para el cual la aceleración total de la partícula en el instante inicial es mínima.

2. Plantear las ecuaciones que determinan el movimiento de la partícula M y la reacción de la hélice.

3. Calcular la posición más alta alcanzada por la partícula, suponiendo que el valor algebraico de la velocidad inicial es: $V_o = \sqrt{2gR}$.