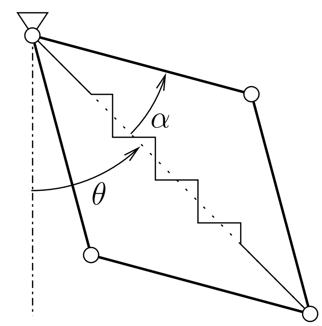
MECÁNICA

Práctica nº 16 curso 2002-2003

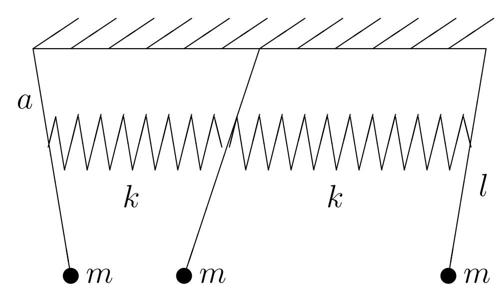
76. El dispositivo de la figura adjunta está formado por cuatro barras pesadas articuladas entre sí, de longitud a y masa m cada una, de forma que están contenidas en un mismo plano vertical. El conjunto se halla sujeto por uno de sus vértices a un punto fijo. Asimismo, en la diagonal entre este vértice de anclaje y el opuesto se sitúa un resorte lineal de longitud natural $l_0 = a/2$ y constante k. El valor de $k = 4mg/a$ es tal que el sistema está en equilibrio estable con el eje del resorte vertical y $\alpha = 60°$. Se pide:



1. Desarrollar la expresión de la energía cinética del sistema, demostrando que vale $T = \dfrac{5}{3}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2) + ma^2(\dot{\theta}^2 - \dot{\alpha}^2)\cos 2\alpha$
2. Obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica.
3. Suponiendo que el movimiento consiste en pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equlibrio estable, linealizar las ecuaciones del movimiento.
4. Calcular los modos normales de vibración y las frecuencias propias.

(Examen parcial, junio 2001)

77. Un conjunto de 3 péndulos simples iguales, de longitud l y masa puntual m cada uno, oscilan en un plano vertical. Se hallan sujetos entre sí por 2 resortes iguales de constante k cada uno, en dirección horizontal y a una altura a por debajo del punto de suspensión, de forma que en la posición de equilibrio no ejercen fuerza alguna.



Se pide:

a. Ecuaciones del movimiento y su linealización para pequeñas oscilaciones.

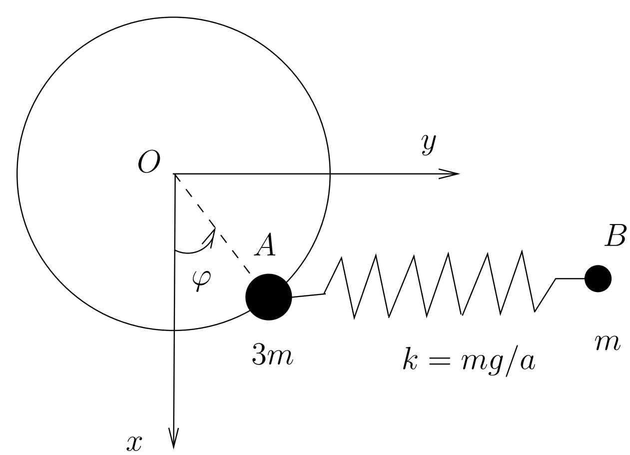
b. Frecuencias y modos propios de vibración del sistema.

c. Expresión de las coordenadas normales.

d. Integración de las ecuaciones para las condiciones iniciales siguentes:

$$\begin{aligned}(\theta_1)_0 =& \ (\theta_2)_0 = (\theta_3)_0 = 0\\ (\dot{\theta}_1)_0 =& \ 2; (\dot{\theta}_2)_0 = 1; (\dot{\theta}_3)_0 = 0\end{aligned}$$

78. Un punto material A de masa $3m$, se mueve, sin rozamiento, por una circunferencia de centro O y radio a contenida en un plano vertical, en el que se elige un sistema de referencia $Oxyz$ cuyo eje Ox coincide con la vertical descendente que pasa por O. Un punto B de masa m se mueve, en el plano Oxy, unido con el punto A mediante un muelle de longitud natural nula y constante de rigidez $K = (mg)/a$. Para determinar la configuración del sistema se utilizarán, como coordenadas generalizadas, el ángulo φ que el radio vector $\boldsymbol{OA}$ forma con el eje Ox, y las coordenadas (x,y) del punto B. Se pide:



1. Determinar la energía potencial del sistema en función de las coordenadas generalizadas. Hallar las posiciones de equilibrio, especificando cuales son estables y cuales inestables.

2. Determinar la energía cinética del sistema en función de las coordenadas y velocidades generalizadas.

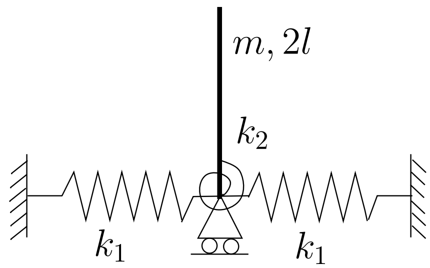
3. Linealizar la energía cinética y la energía potencial del sistema, alrededor de la posición de equilibrio estable determinada por $\varphi = 0$, $x = 2a$, $y = 0$.

4. Pantear las ecuaciones de Lagrange para pequeños movimientos del sistema alrededor de la posición de equilibrio estable anteriormente mencionada.

5. Obtener las frecuencias naturales de vibración del sistema y las formas modales asociadas a cada uno de los modos propios de oscilación. Determinar unas coordenadas normales del sistema.

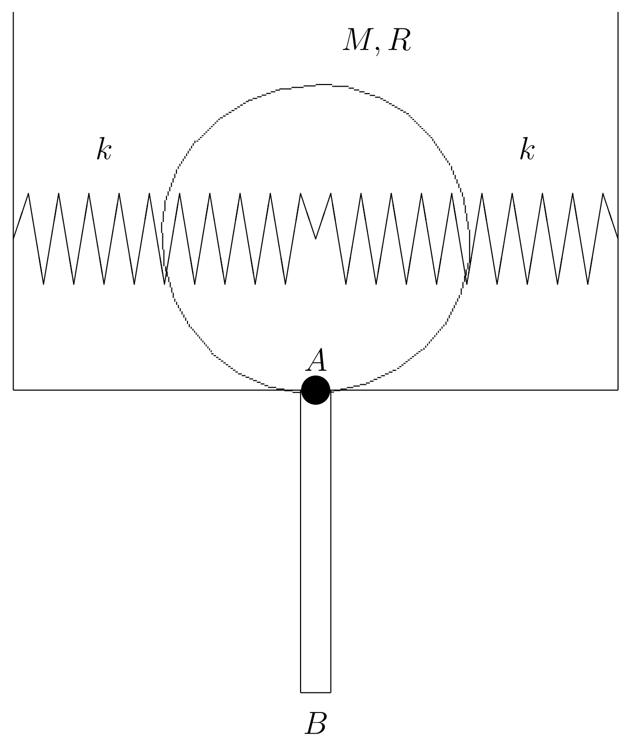
79. Una barra homogénea de masa m y longitud $2l$ se mueve en todo momento en un plano vertical de forma que su extremo inferior articulado se mueve según una recta horizontal, y se encuentra sujeto a dos puntos fijos mediante dos resortes iguales de constante elástica $k_1 = \frac{3mg}{5l}$ cada uno. Además, existe un muelle de torsión de constante $k_2 = \frac{3mgl}{2}$ tal que ejerce momento nulo sobre la barra cuando ésta se encuentra en posición vertical (posición de equilibrio estable), tal y como muestra la figura adjunta. Se pide:

1. Expresión de la lagrangiana;
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento;
3. Ecuaciones diferenciales linealizadas para pequeños desplazamientos alrededor de la posición de equilibrio estable;
4. Frecuencias propias;
5. Modos propios de vibración;
6. Coordenadas normales en función de las coordenadas geométricas;
7. Resolución de las ecuaciones linealizadas suponiendo que el sistema parte del reposo con una inclinación de la barra de 30° respecto de la vertical, y el extremo inferior en la posición de equilibrio determinada por los muelles horizontales;



80. En el sistema de la figura, el disco de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre el suelo horizontal, sometido a la acción de dos resortes de rigidez k y longitud natural l_0. A su vez, en el punto A va articulada una varilla AB de longitud $2R$ y masa M.
Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización para pequeñas oscilaciones.
3. Si $k = Mg/R$, obtener las frecuencias propias y los modos normales de oscilación.



PROBLEMA COMPLEMENTARIO

Un motor gira con una velocidad constante ω. Su eje lleva una excéntrica cuyo efecto dinámico equivale al de una masa puntual m situada a una distancia e del eje de giro. El motor está fijo a un carretón de masa m_2 (incluida la masa del motor pero no la de la excéntrica). Éste puede deslizar horizontalmente respecto de un segundo carretón de masa m_1, que a su vez desliza sobre una recta horizontal fija (ver figura). Entre los dos carretones, así como entre el carretón inferior y una pared vertical fija, hay sendos resortes iguales de elongación horizontal y constante elástica k. Se considera que el desplazamiento vertical del carretón superior no es nulo, y que no existe rozamiento en ninguna de las superficies.
Se pide:

1. Ecuaciones de Lagrange del sistema.
2. Frecuencias propias.
3. Modos normales de vibración (vectores propios).
4. Expresión de las coordenadas normales.
5. Suponiendo que se alcanza el régimen permanente (por la existencia de un pequeño amortiguamiento inevitable), obtener la expresión del movimiento resultante.

Nota: Particularizar para los siguientes valores numéricos: $\omega = 900$ rpm, $m = 40$ kg., $m_2 = 5000$ kg., $m_1 = 8000$ kg., $k = 8000$ N/m y los muelles verticales tienen una constante elástica $k_v = 500000$ N/m., $e = 0,1$ m.