

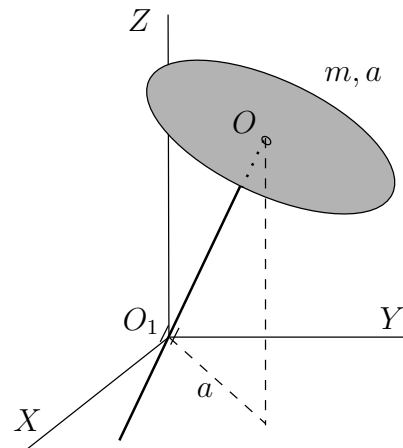
# MECÁNICA

## Práctica nº 13

curso 2002-2003

**61.** Un sólido está formado por un disco homogéneo y pesado de masa  $m$  y radio  $a$  al que se ha soldado en su centro (punto  $O$ ) y perpendicularmente a su plano una varilla sin masa y de longitud muy grande.

El sólido se mueve de forma que el punto  $O$  se encuentra contenido en todo momento en una superficie cilíndrica fija de eje vertical y radio  $a$ , y la varilla pasa siempre por un punto fijo  $O_1$  del eje de la superficie cilíndrica. Se supone que no existe rozamiento en ninguna de las partes móviles y que la varilla es lo suficientemente larga como para que nunca deje de pasar por  $O_1$ .



Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema, y elegir razonadamente un conjunto adecuado de parámetros que los representen.
2. Expresión de la velocidad angular del sólido.
3. Expresión del momento cinético en el centro del disco  $O$ .
4. Expresión del momento cinético en el punto  $O_1$ .
5. Expresión de la energía cinética del sólido.
6. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y expresar éstas en función de los grados de libertad y sus derivadas.

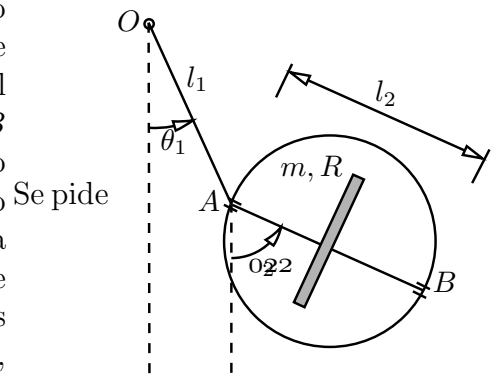
**62.** Una varilla de masa  $m$  y longitud  $a$  se mueve por una esfera fija y lisa de centro  $O$  y radio  $a$  bajo la acción del campo gravitatorio simplificado, de manera que sus extremos están en todo momento sobre dicha esfera, sin ninguna otra restricción. Se pide:

1. Definir un conjunto de parámetros adecuados para describir la configuración del sistema.
2. Considerando un triedro móvil  $Gxyz$  con origen en el centro de masas de la varilla y tal que  $Gy$  va dirigido según  $OG$  y  $Gz$  según la varilla, expresar la velocidad angular en dichos ejes. En lo sucesivo se denominarán  $p$ ,  $q$ ,  $r$  las componentes de dicha velocidad angular.

3. Expresión del momento cinético en  $O$ , en función de  $p$ ,  $q$  y  $r$ .
4. Ecuaciones diferenciales de Euler del movimiento de la varilla.
5. Expresión de las integrales primeras del movimiento en caso de que existan.

(Examen Final, enero 2002)

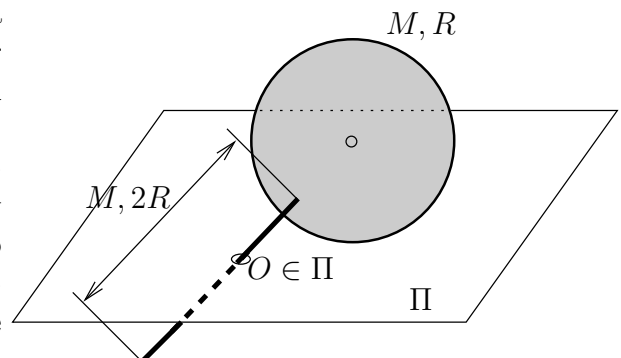
**63.** Un sistema mecánico está formado por un disco pesado de masa  $m$  y radio  $R$ , un aro sin masa de diámetro  $l_2$  y un alambre sin masa de longitud  $l_1$ . El disco puede girar libremente alrededor del diámetro  $AB$  del aro manteniéndose siempre perpendicular al plano de éste. A su vez, el aro se encuentra unido al punto fijo  $O$  a través del alambre  $OA$ , tal y como muestra la figura adjunta. La articulación situada en  $A$  es tal que obliga al alambre  $OA$  y al eje  $AB$  a moverse contenidos en todo momento en el mismo plano vertical móvil, dejando libres todos los demás movimientos posibles.



1. Expresión de la velocidad angular del disco en función de los grados de libertad del problema y sus derivadas.
2. Expresión de la energía cinética del sistema.
3. Expresión del momento cinético del sistema en el punto  $O$ .
4. Expresión e interpretación física de las posibles integrales primeras del movimiento.

(Examen Final, junio 2002)

**64.** Un sólido rígido está formado por una esfera sólida de masa  $M$  y radio  $R$  y una barra de masa  $M$  y longitud  $2R$ , soldada por un extremo a la esfera en un punto de su superficie en dirección normal a la misma. La esfera se mueve apoyada en todo momento sobre un plano horizontal liso fijo  $\Pi$ , y la barra atraviesa el plano por un pequeño agujero también liso, de forma que puede entrar y salir libremente a través del mismo. Se supondrá que la barra no llega a lo largo del movimiento a salir totalmente del agujero. Se pide:



1. Expresar el tensor central de inercia  $\mathbf{I}_G$  en ejes principales;

2. Definir claramente los grados de libertad del sistema;
3. Expresión del momento cinético del sólido en el centro de masa;
4. Expresión del momento cinético del sólido en el punto  $O$ , situado en el agujero;
5. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sólido.

(Examen Final, septiembre 2001)

**65.** Un sistema está compuesto por un disco de masa  $m$  y radio  $R$  y un mecanismo de suspensión de masa despreciable que lo soporta de la forma que se expone a continuación.

El eje  $AA'$  perpendicular al disco por su centro es el diámetro de un aro que tiene radio suficiente para alojar a dicho disco. Este aro se articula a un bastidor en forma de  $U$  en los puntos  $BB'$ , de forma que las direcciones definidas por  $AA'$  y  $BB'$  son perpendiculares. Por último, el bastidor está articulado en su base a un punto fijo  $O$ , que se encuentra a una distancia  $L$  del centro del disco. El aro incorpora un pequeño motor que impone al disco una velocidad de giro relativa al aro constante de valor  $\omega_0$ . A su vez, el aro puede girar libremente alrededor del eje  $BB'$ , y el bastidor en  $U$  sólo puede moverse girando alrededor de  $O$  contenido en todo momento en un plano vertical fijo.

Inicialmente la configuración del mecanismo es la de la Figura adjunta, con el disco girando con velocidad  $\omega_0$  alrededor del eje  $AA'$  vertical y el aro en reposo totalmente contenido en el mismo plano vertical que el bastidor en  $U$ .

En un cierto instante se produce una perturbación de magnitud arbitraria de forma que el eje  $AA'$  se aparta de la vertical y el mecanismo adquiere un movimiento general.

Se pide:

1. Expresión de la velocidad angular del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas;
2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento del disco;
3. Calcular el par que debe ejercer el motor para imponer la velocidad de giro del disco relativa al aro  $\omega_0$  constante, en una posición genérica.

(Examen Final, junio 2001)

