MECÁNICA

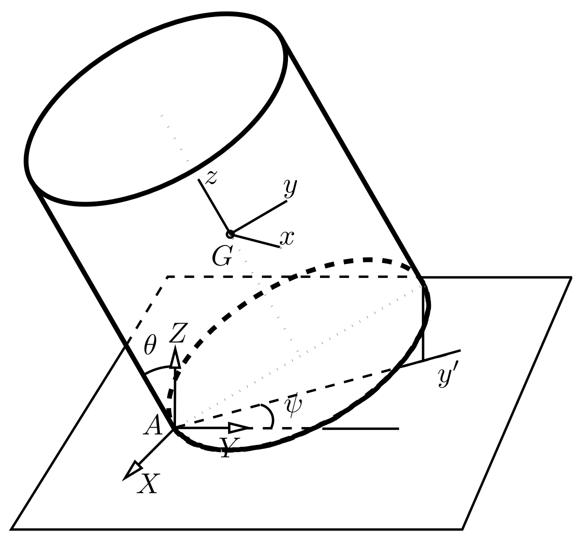
Práctica nº 12 curso 2002-2003

56. Una bola de billar se pone en movimiento al ser golpeada por el taco de forma que adquiere una velocidad inicial de su centro $\boldsymbol{v}_0$ (tangente a la mesa) y una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}_0$. En el contacto con la mesa se desarrolla un rozamiento con coeficiente μ. Se pide:

1. Determinar el movimiento, demostrando que éste tiene dos etapas diferenciadas: una fase en que la bola desliza, y una fase posterior en que rueda sin deslizar.

2. Discutir si mediante la observación del movimiento sería posible determinar si la bola está hueca o si es maciza.

57. Un cilindro macizo de masa M, radio R y altura $3R$ se mueve con el borde de su base inferior apoyado sobre un plano horizontal liso, deslizando libremente. Se consideran el triedro de direcciones fijas $AXYZ$ (A es el punto de contacto, X, Y pertenecen al plano horizontal, y Z es vertical) y el triedro móvil $Gxyz$ (G es el centro, y según el diámetro de máxima pendiente, x según un diámetro horizontal y z según el eje de revolución del cilindro). La orientación de este triedro se realiza con los ángulos $\psi = \angle(AYy')$ y $\theta = \angle(AZz)$, (y' es la proyección sobre el plano horizontal del diametro de máxima pendiente). Se pide:



1. Tensor de inercia en G, expresando sus componentes en los ejes xyz. ¿Son constantes?.

2. Número de grados de libertad del sistema y definir claramente los parámetros escogidos para representar dichos grados de libertad.

3. Momento de las fuerzas en G en una posición genérica, considerando un valor genérico de la reacción en A.

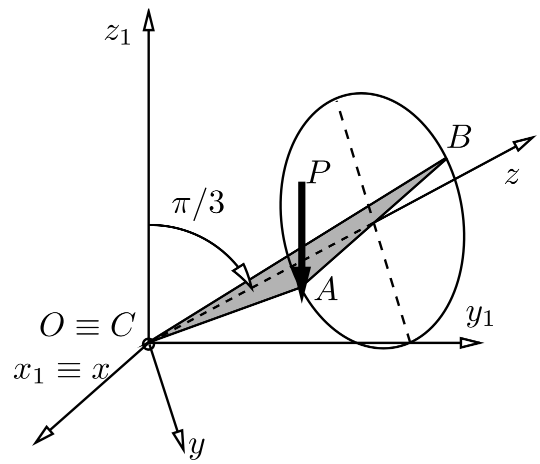
4. Vector velocidad angular del cilindro expresado en el triedro $Gxyz$.

5. Ecuaciones dinámicas del movimiento.

6. Integrales primeras. Dejar el movimiento reducido a una cuadratura.

(Examen Parcial, abril 2002)

58. Un sólido está constituido por una placa en forma de triángulo equilátero homogéneo ABC de lado $2a$ y masa m unida a un aro sin masa de radio a. El plano de la placa y el aro son perpendiculares y el lado AB es un diámetro de éste, formando un único sólido rígido.



El sólido así definido se coloca con el vértice C obligado a permanecer en el origen de coordenadas O mediante una articulación esférica. Asímismo el aro está obligado a rodar sin deslizar por el plano horizontal Ox_1y_1, existiendo fuerzas de ligadura solamente según la tangente al aro y según la normal al plano, pero no según la recta que une el punto de contacto con O. En la posición inicial el diámetro AB está horizontal y el sólido en reposo. En este estado se le aplica una percusión vertical descendente de valor P en el punto A. Se pide:

1. Tensor de inercia del sólido empleando para las coordenadas el triedro $Oxyz$ ligado al sólido.

2. La percusión produce en el sólido una velocidad de rodadura inicial instantánea alrededor de Oy_1 de valor $\Omega = 24P/(13ma)$, quedando en movimiento a partir de este momento. Obtener las expresiones de la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ y de la energía cinética del sólido en un instante genérico de este movimiento. Dejar el movimiento reducido a una cuadratura en función del ángulo ψ girado alrededor del eje Oz_1.

3. Obtener la reacción del plano sobre el aro en un instante genérico, expresada en función de ψ.

59. Sea un sólido rígido $\mathcal{B}$ con un punto fijo O y un triedro cartesiano $Oxyz$ fijo. Se producen dos rotaciones consecutivas de $\mathcal{B}$, la primera un ángulo α alrededor del eje Oz, y la segunda un ángulo β alrededor del nuevo eje Ox' (resultado del primer giro sobre el eje Ox. Se pide:

1. Obtener la expresión matricial que relaciona las coordenadas de un punto en la configuración final, $(x, y, z)^T$, con las coordenadas iniciales del mismo punto, $(x^o, y^o, z^o)^T$.

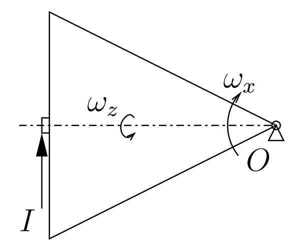
2. Emplear esta expresión para deducir la relación entre las componentes del tensor de inercia en la base $Oxyz$ entre ambas configuraciones.

3. Para el caso en que $\alpha = 90°$ y $\beta = 90°$, calcular el eje $\boldsymbol{p}$ alrededor del cual se puede considerar que ha girado el sólido al moverse desde la configuración inicial a la final, calculando también la magnitud de este giro (φ).

   Comprobar que a partir de $\boldsymbol{p}$ y φ se obtiene la matriz de rotación calculada en el apartado (1) aplicando la fórmula de Rodrigues.

4. Suponiendo $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ funciones dadas del tiempo, calcular a partir de la matriz de rotación la velocidad angular del sólido, y expresar sus coordenadas tanto en el triedro del cuerpo como en el fijo para unos valores (α, β) genéricos.

60. Un sólido rígido homogéneo de masa M tiene forma de cono recto con base circular de radio R y altura H, estando su vértice fijo en un punto O mediante una articulación esférica. Inicialmente se encuentra con su eje de revolución en reposo y horizontal, girando con velocidad angular ω_z alrededor del mismo. En ese instante se aplica una percusión vertical I en un pequeño resalte situado en el centro de la base, que le proporciona una velocidad de rotación adicional alrededor de un eje horizontal de valor $\omega_x = IH/A$, siendo A el momento de inercia respecto de dicho eje en O. Después de la percusión el sólido queda en movimiento, sometido a su peso y con el punto fijo O. Expresar la energía mecánica total del sistema en función exclusivamente del ángulo que forma el eje del cono con la vertical, indicando si esta energía se conserva o no. ¿Sería posible que en este movimiento el eje del cono alcance en algún momento la posición vertical?



(Examen Extraordinario, enero 2003)

⋆