MECÁNICA

Práctica nº 10 curso 2002-2003

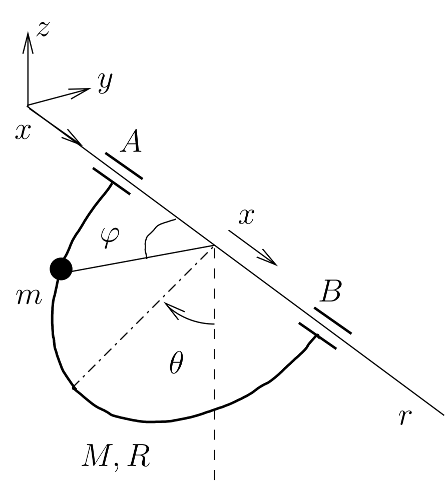
46. Una hélice tiene por ecuaciones, en coordenadas cilíndricas, $\rho = b, \quad z = a\varphi$, siendo a y b constantes. Sobre ella se mueve sin rozamiento una partícula de masa m, que se encuentra atraída desde el origen de coordenadas por una fuerza proporcional a la distancia, con constante k. Se desprecia la acción de la gravedad. Se pide:

a. Obtener las ecuaciones del movimiento e integrales primeras en su caso;

b. Calcular la reacción de la hélice sobre la partícula, empleando multiplicadores de Lagrange;

c. Las mismas cuestiones, suponiendo ahora que la hélice es en realidad una acanaladura en la superficie de un cilindro macizo vertical de masa M, que puede girar libremente alrededor de su eje.

47. Un semiaro pesado de masa M y radio R puede deslizar y girar sin rozamiento a lo largo de una recta horizontal fija r por su diámetro AB. Además, una partícula pesada de masa m desliza sin rozamiento ensartada en el semiaro. Se pide:



1. Expresiones de la energía cinética y potencial del sistema formado por la partícula y el semiaro.

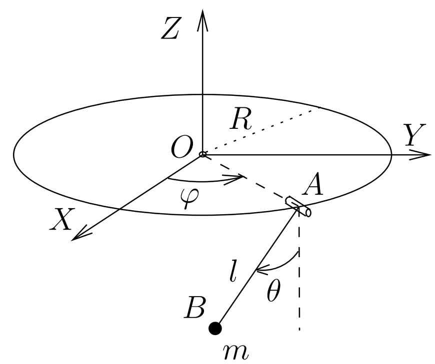
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento.

3. Expresar las posibles integrales primeras e interpretarlas físicamente.

4. Expresión de la reacción entre el aro y la partícula en función de las coordenadas generalizadas seleccionadas y sus derivadas.

(Examen final, junio 1999)

48. Una partícula pesada de masa m se mueve unida mediante una varilla AB rígida, sin masa y de longitud l, a una rótula A de masa despreciable. A su vez, esta rótula A está obligada a permanecer en todo momento sobre una circunferencia horizontal fija de radio R. La rótula A actúa obligando a que la varilla se mueva contenida el plano vertical tangente por A a la circunferencia.



Se pide:

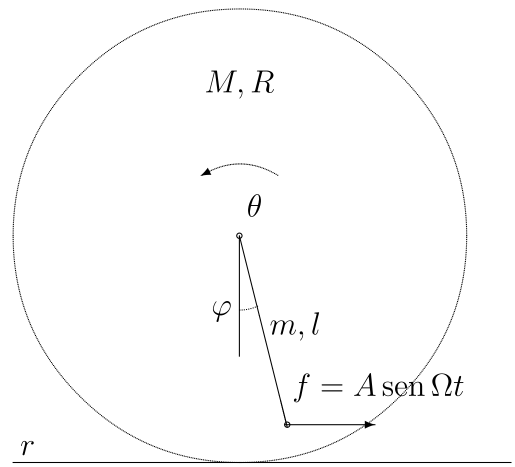
1. Obtener las ecuaciones del movimiento mediante los métodos de la mecánica analítica.
2. Expresar las posibles integrales primeras del movimiento, e interpretarlas físicamente.
3. En el caso de que A se mueva con velocidad de módulo constante $|\boldsymbol{v}_A| = \omega R$, expresar el potencial de la fuerza de arrastre correspondiente a un sistema de referencia móvil con origen en A, con el eje z vertical y cuyo plano yz contiene en todo momento a la varilla AB.
4. Para la situación del apartado 3, expresar posibles integrales primeras del movimiento e interpretarlas físicamente.

49. Una ciudad espacial está construida sobre la pared interior de una gran nave cilíndrica que gira alrededor de su eje de revolución. El radio del cilindro es $R = 1000\,\text{km}$ y la velocidad de rotación $\omega = 0{,}18°/\,\text{s}$. De esta forma se consigue una gravedad artificial ($\omega^2 R$) similar a la terrestre (g). En esta ciudad se produce una guerra entre facciones rivales que habitan en la superficie interior del cilindro y se disparan proyectiles entre sí.

1. Demostrar que cuando los proyectiles se disparan con velocidades pequeñas ($v \ll \omega R$) y pequeños alcances ($\ll R$), las ecuaciones del movimiento son idénticas a las de un proyectil similar en la superficie de la tierra.
2. Obtener las ecuaciones generales del movimiento para un proyectil con velocidad y alcance cualesquiera empleando coordenadas cilíndricas que giren con el cilindro.
3. Sea un proyectil que se lance verticalmente con velicidad $v' = \omega R$ en el sistema de referencia no inercial. Calcular su trayectoria expresada como h (altura sobre la superficie interior del cilindro) en función de ϕ' (posición angular relativa al punto de lanzamiento, en las coordenadas cilíndricas no inerciales). Emplear para ello únicamente el razonamiento geométrico que un observador inercial usaría para predecir lo que vería el observador no inercial. Obtener en concreto el alcance Φ y la altura máxima H.

4. Integrando numéricamente las ecuaciones diferenciales del movimiento no inercial obtenidas en el aptdo. 2, comprobar que la trayectoria obtenida coincide con la obtenida por un método distinto en el aptdo. 3.

50. Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta r, manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa m y longitud $l < R$. En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor $f = A \operatorname{sen} \Omega t$. El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Se pide:



a. Tomando como coordenadas el giro del disco θ y el ángulo de la varilla con la vertical φ, expresar el trabajo δW para un desplazamiento virtual arbitrario.

b. Fuerzas generalizadas según las coordenadas anteriores.

c. Ecuaciones de Lagrange del movimiento.

d. Discutir la existencia o no de integrales primeras y obtenerlas en su caso.

e. Reacción tangencial de la recta sobre el disco, empleando multiplicadores de Lagrange.

⋆