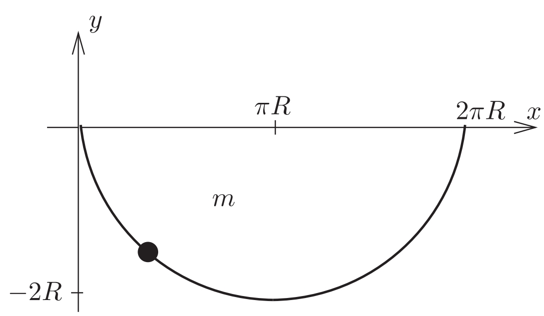
MECÁNICA

Práctica nº 1 curso 2002-2003

1. Bajo la acción de la gravedad, una partícula m se mueve sin rozamiento en la cicloide (ver figura adjunta) definida en forma paramétrica por las expresiones:

$$x = R(\theta - \operatorname{sen}\theta); \quad y = -R(1 - \cos\theta),$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Del movimiento así definido se pide:

1. Obtener la relación $s(\theta)$, siendo s la longitud de arco medido desde el punto más bajo de la cicloide ($\theta = \pi$).

2. Hallar las expresiones de T (Energía cinética), y V (Energía potencial) en función de s y $\dot{s} = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$.

3. Obtener la ecuación dinámica del movimiento (ecuación diferencial de orden 2 en $s(t)$).

4. Si la partícula se libera, partiendo del reposo, desde la posición $s = -4R$ ($\theta = 0$), obtener el tiempo que tarda en llegar al punto más bajo de la cicloide ($s = 0$).

5. Calcular el tiempo que tardaría la partícula en llegar al punto más bajo si se libera esta vez desde la posición $s = -2R$ ($\theta = 120°$), partiendo también del reposo.

6. Caracterizar el movimiento resultante, estableciendo la similitud con un péndulo simple en pequeñas oscilaciones, hallando la longitud equivalente del péndulo. ¿Qué diferencia existiría con un péndulo simple general, es decir, no limitado a pequeñas oscilaciones?

(Problema Puntuable, Curso 96/97)

2. Una partícula pesada de masa m se mueve con enlace bilateral liso por la superficie

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

referida a un sistema ortogonal $Oxyz$ en el que Oz es la vertical ascendente.

Además del peso, el punto es atraido por el origen de coordenadas con una fuerza proporcional a la distancia, cuya expresión es

$$\boldsymbol{F} = -Km\boldsymbol{r}$$

Inicialmente, el punto se encuentra en el origen de coordenadas O y su velocidad es $\boldsymbol{v} = 2Ka\,\boldsymbol{i}$

Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Ecuaciones horarias del movimiento de la partícula.
3. Reacción de la superficie en un instante genérico.

(Ejercicio 9, Curso 95/96)

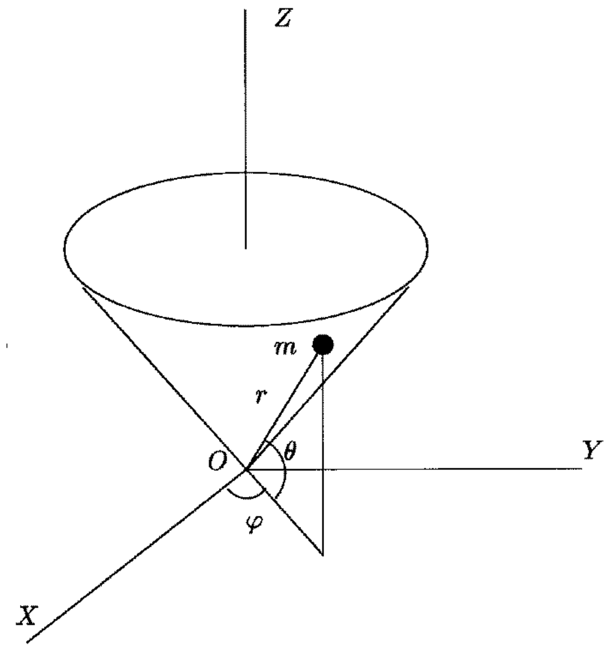
3. Una partícula pesada de masa m se mueve con ligadura bilateral sobre el cono:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

siendo $z > 0$. En el instante inicial la partícula se encuentra en $z = z_0$ con velocidad horizontal $v_0 = \omega_0 z_0$.

Empleando coordenadas esféricas, se pide:

1. Calcular el momento respecto de O de las fuerzas aplicadas sobre la partícula en un instante genérico, y su proyección sobre el eje OZ.
2. Calcular el momento cinético de la partícula respecto de O en un instante genérico, y su proyección sobre el eje OZ.
3. Expresión de la energía total de la partícula, en un instante genérico.
4. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
5. Determinar entre que valores de z se desarrolla el movimiento.
6. Calcular el valor necesario de ω_0 para que la trayectoria de la partícula sea una circunferencia.



(Problema Puntuable, Curso 97/98)

4. Una partícula material pesada M, de masa m, se mueve sobre una hélice cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\,\mathrm{sen}\theta \\ z &= R\theta \end{aligned}$$

Sobre el punto actúa además de la gravedad una fuerza de resistencia proporcional y opuesta a la velocidad tal que cuando la velocidad del punto es $\sqrt{gR}$, la fuerza de resistencia es igual al peso mg de la partícula.

En el instante inicial ($t = 0$) la partícula se encuentra en la posición definida por las coordenadas (R,0,0) y se lanza con una velocidad $V_o\sqrt{2}/2(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

Se pide:

1. Demostrar que existe un valor de la velocidad inicial V_o para el cual la aceleración total de la partícula en el instante inicial es mínima.

2. Plantear las ecuaciones que determinan el movimiento de la partícula M y la reacción de la hélice.

3. Calcular la posición más alta alcanzada por la partícula, suponiendo que el valor algebraico de la velocidad inicial es: $V_o = \sqrt{2gR}$.

(Ejercicio 4, Curso 93/94)

5. Un punto material M pesado y de masa m está obligado a moverse sin rozamiento sobre una circunferencia vertical de radio a. Dicha circunferencia gira con velocidad angular constante ω alrededor del diámetro vertical AB.

En el instante inicial el punto se sitúa en el punto más bajo y tiene una velocidad inicial relativa a la circunferencia $V_o = \sqrt{2ga}$.

Se pide:

1. Dejar el movimiento reducido a una cuadratura.
2. Reacción de la circunferencia sobre el punto M en función de la posición

(Ejercicio 3, Curso 93/94)

———————————⋆———————————