MECÁNICA

Práctica nº 3 curso 2001-2002

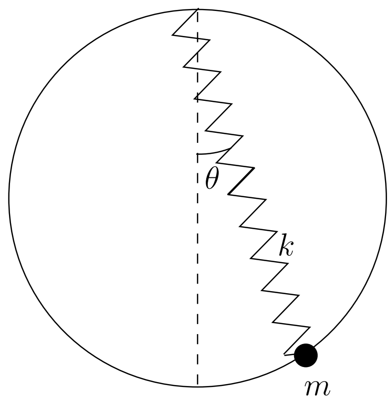
11. Una masa puntual m desliza con enlace bilateral sobre una circunferencia lisa de radio R situada en un plano vertical fijo. La partícula está unida al punto más alto de la circunferencia mediante un resorte de constante k y longitud natural l_0. Se pide:

1. Ecuación diferencial del movimiento.

2. Linealizar la ecuación obtenida en el apartado anterior suponiendo pequeñas oscilaciones en torno a la posición en que la partícula está en el punto más bajo.

3. Discutir la naturaleza del movimiento en función de los valores de de k, m, l_0 y R

4. Ecuación horaria del movimiento para los valores $l_0 = a$, $R = l/2$, $k = mg/b$ y $l = a + b$.



12. Disponemos de un largo resorte elástico homogéneo. Cortamos un trozo de 20 cm de longitud que utilizamos para hacer un oscilador lineal con una partícula de 5 gr de masa. Observamos que el período de las oscilaciones libres es de π segundos. Se pide:

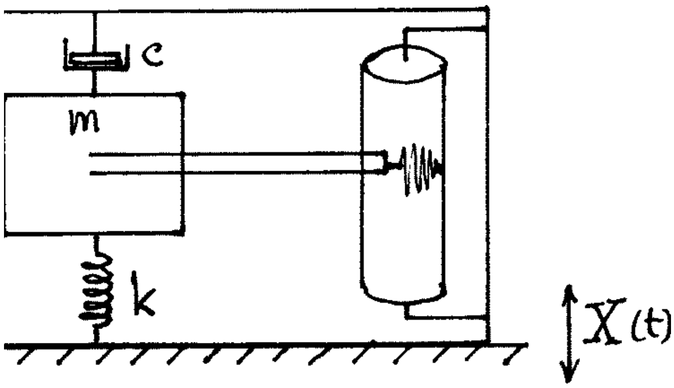
1. Si partimos este trozo por la mitad y disponemos en paralelo las dos mitades, ¿cuánto valdrá el período de las oscilaciones de la misma partícula?

2. Si deseamos que el período de las oscilaciones sea de 2π segundos, ¿qué longitud del largo resorte debemos cortar?

3. ¿Cuánto valdrá la constante de un trozo de 1 metro de largo?

NOTA: Este problema es una aplicación de una propiedad de los resortes elásticos, que se demostrará: si disponemos en paralelo n resortes de constantes $k_i (i = 1...n)$ y de la misma longitud, la constante K del resorte equivalente es $\Sigma(k_i)$, mientras que si los disponemos en serie vendrá dada por: $1/K = \Sigma(1/k_i)$.

13. El aparato cuyo esquema se representa en la figura es un sismógrafo.



Se pide:

a. Escribir la ecuación diferencial que permite calcular el desplazamiento relativo x, cuando la caja está animada de un movimiento vertical armónico $X(t) = R \operatorname{sen} \Omega t$.

b. Integrar esta ecuación diferencial. Demostrar que las oscilaciones libres se amortiguan rápidamente. Tomando sólo en cuenta las oscilaciones forzadas debidas al movimiento de pulsación Ω, calcular la relación r/R en función de Ω/ω_0. Se denomina r a la amplitud del movimiento relativo $x(t)$, R a la amplitud del movimiento forzado $X(t)$ y ω_0 a la pulsación del movimiento libre no amortiguado.

c. Demostrar que la medida de la amplitud r del movimiento relativo permite determinar: o bien la amplitud R del movimiento forzado, si Ω es muy grande con relación a ω_0; o bien la aceleración máxima $\Omega^2 R$ del movimiento forzado, si Ω es muy pequeño en relación a ω_0.

(Ejercicio 15, Curso 95/96)

14. En un estanque hay una boya que se puede representar como un cilindro de masa m y radio R. Cuando el agua del estanque, cuya densidad es ρ, está en reposo, la boya está en equilibrio estable con el eje de revolución vertical. Se generan olas en el estanque de tal manera que la sobreelevación de la superficie libre respecto de la posición en reposo es:

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Se supone que el radio del cilindro es mucho menor que la longitud de la ola. Se pide:

1. Ecuación diferencial del movimiento de la boya.

2. Frecuencia propia y ecuaciones horarias del movimiento de la boya, suponiendo que en el instante inicial está en reposo.

3. Suponiendo que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, obtener la amplitud de régimen permanente del movimiento de la boya en el caso particular en que $m = 10\,\mathrm{kg}$, $\rho = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$ y $\mathrm{d} = 0{,}1 \operatorname{sen} 2t$ (en metros).

(Ejercicio 15, Curso 97/98)

15. Una masa m de $400\,\mathrm{kg}$ puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal, unida mediante un resorte de constante elástica $k = 10^5\,\mathrm{N/m}$ a una base fija. Existe además un amortiguamiento viscoso, que reduce la amplitud de la oscilación libre a la centésima parte cada $10\,\mathrm{s}$. Se pide:

— Valor de la constante c de amortiguamiento

— Suponiendo que parte de $0,5\,\mathrm{m}$ desde la posición de equilibrio sin velocidad, en vibración libre, obtener la ecuación del movimiento y calcular la posición al cabo de $2\,\mathrm{s}$.

— Suponiendo ahora que a la base se le comunica un movimiento impuesto armónico, de amplitud $0,01\,\mathrm{m}$ y frecuencia $2\,\mathrm{Hz}$, obtener el movimiento durante el régimen transitorio, así como en el régimen permanente. Como condiciones iniciales, se admitirá que parte de reposo desde la posición de equilibrio.

— Obtener la frecuencia de la excitación que produce la máxima amplitud del movimiento y el valor de la misma (resonancia).

(Ejercicio 11, Curso 99/00)

———————————⋆———————————