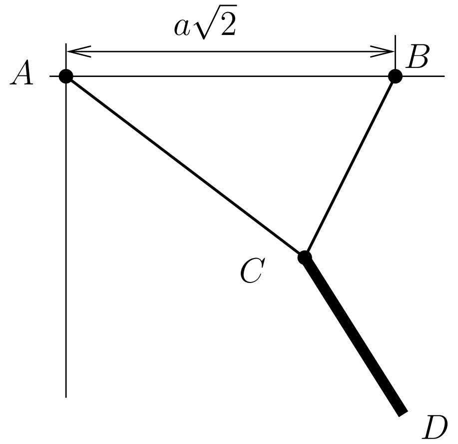
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C9 (10 de mayo de 2010)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*



En un plano vertical se dispone de un hilo AB flexible, inextensible y sin peso, de longitud $2a$ cuyos extremos están colocados en dos puntos fijos de una misma horizontal distantes $a\sqrt{2}$. Una varilla CD, homogénea, pesada de longitud a y masa m cuelga por su extremos C deslizando por el hilo sin rozamiento. Sobre cada elemento de longitud ds de la varilla actúa, además del peso, una fuerza repulsiva desde la vertical que pasa por el punto A, proporcional al producto de la distancia por la longitud del elemento, siendo k la constante de proporcionalidad. Se Pide:

1. Plantear las ecuaciones de la estática que conducen a la resolución del problema y que permiten determinar las posiciones de equilibrio y la reacción en el extremo C.

2. Particularizando las ecuaciones anteriores, determinar las posiciones de equilibrio en el caso particular de $k = 0$.

———————★———————

69

87. En un plano vertical se dispone de un hilo AB flexible, inextensible y sin peso, de longitud $2a$ cuyos extremos están colocados en dos puntos fijos de una misma horizontal distantes entre si $a\sqrt{2}$.

Una varilla CD, homogénea, pesada de longitud a y masa m cuelga por su extremo C deslizando por el hilo sin rozamiento.

Sobre cada elemento de longitud ds de la varilla actúa, además del peso, una fuerza repulsiva horizontal proporcional al producto de la distancia del elemtno a la vertical que pasa por A, por la longitud del elemento, siendo K la constante de proporcionalidad. Se pide:

1. Plantear las ecuaciones generales de la estática que resuelven el problema y que permiten determinar las posiciones de equilibrio y la reacción en el extremo C de la varilla.

2. Determinar la función de potencial de la que derivan las fuerzas directamente aplicadas y calcular las posiciones de equilibrio mediante las ecuaciones de la estática analítica.

1º Tomamos la referencia Oxy, cuyo origen O es el punto medio de AB.

Denominamos por (ξ, η) a las coordenadas del extremo C, y θ el ángulo de la varilla con la vertical. Las coordenadas (ξ, η) no son independientes, las posibles posiciones que puede tomar C, es una elipse de focos A y B, semieje mayor a y distancia focal $a\sqrt{2}$. La ecuación de la elipse será: $x^2 + 2y^2 = a^2$ ∴ $\xi = a\cos\varphi$; $\eta = -\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\varphi$

Fuerzas que actúan sobre la varilla son:

- Reacción del hilo en C.
- Fuerzas gravitatorias $\vec{G} = -mg\vec{j}$, $\vec{M}_C = -\frac{1}{2} mga \operatorname{sen}\theta\, \vec{k}$
- Fuerza de repulsión de la vertical por A:

$$\vec{F} = K\int_0^a (\xi + s\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2})\, ds\, \vec{i} = \frac{1}{2}Ka^2\left(\frac{2\xi}{a} + \sqrt{2} + \operatorname{sen}\theta\right)\vec{i}$$

El momento en C del sistema de fuerzas

$$\vec{M}_C = \int (dF)\, s\cos\theta\, \vec{k} = K\int_0^a (\xi + s\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2})(s\cos\theta)\, ds\, \vec{k} =$$

$$= (K\cos\theta)\left[\xi\, s^2/2 + s^3/3 \operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\, s^2/2\right]_0^a \vec{k} =$$

$$= \frac{Ka^3}{2}\cos\theta\left[\xi/a + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}/2\right]\vec{k}$$

El sistema de fuerzas equivalente en C, será:

$$\vec{R} = \tfrac{1}{2}Ka^2\left(\frac{2\xi}{a} + \sqrt{2} + \operatorname{sen}\theta\right)\vec{i} - mg\vec{j}$$

$$\vec{M}_C = \frac{Ka^3}{2}\cos\theta\left(\frac{\xi}{a} + \sqrt{2}/2 + 2/3\operatorname{sen}\theta\right)\vec{k} - \tfrac{1}{2}mga\operatorname{sen}\theta\,\vec{k}$$

Reacción del hilo: $\vec{N} = T\vec{u} + T\vec{v} = T\left(\frac{-2\cos\varphi}{2-\cos^2\varphi}\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi}{2-\cos^2\varphi}\vec{j}\right)$

Impongamos las condiciones de equilibrio:

$$\vec{R}+\vec{N}=0 \qquad \vec{M}_c=0$$

$$\tfrac{1}{2} K a^2(2\cos\varphi+\sqrt{2}+\operatorname{sen}\theta) - T\,\frac{2\cos\varphi}{2-\cos^2\varphi}=0 \quad (1)$$

$$-mg + T\,\frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi}{2-\cos^2\varphi}=0 \quad (2)$$

$$K a^2\left(\cos\varphi+\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{2}{3}\operatorname{sen}\theta\right)=mg\,\operatorname{tg}\theta \quad (3)$$

Las incognitas son T, θ, φ.

2º/ La función de potencial: $dV=-\tfrac{1}{2}K\left[\left(\xi+\tfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)+s\operatorname{sen}\theta\right]^2 ds$

Integrando: $V=-\tfrac{1}{2}K\int_0^a\left(\xi+\tfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 ds+\tfrac{1}{2}K\int_0^a s^2\operatorname{sen}^2\theta\, ds+\tfrac{1}{2}K\int_0^a 2\left(\xi+\tfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)s.\operatorname{sen}\theta\, ds$

$$V=-\left[\tfrac{1}{2}Ka\left(\xi^2+\tfrac{a^2}{2}+\sqrt{2}\,\xi a\right)+\tfrac{1}{2}K\tfrac{a^3}{3}\operatorname{sen}^2\theta+\tfrac{1}{2}Ka^2\left(\xi+\tfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)\operatorname{sen}\theta\right]$$

La función potencial será:

$$V=-mga\left(\operatorname{sen}\varphi-\tfrac{1}{2}\cos\theta\right)-\tfrac{1}{2}Ka^3\left(\cos^2\varphi+\sqrt{2}\cos\varphi+\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\right)-$$
$$-\tfrac{1}{2}Ka^3\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta+\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^2\theta\right)+\tfrac{1}{2}K\tfrac{a^3}{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=-\tfrac{1}{2}mga\operatorname{sen}\theta-\tfrac{1}{2}Ka^3\cos\varphi\cos\theta-\tfrac{1}{2}Ka^3\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-K\tfrac{a^3}{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=0 \qquad Ka^2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{2}{3}\operatorname{sen}\theta+\cos\varphi\right)=mg\,\operatorname{tg}\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=-mga\cos\varphi+Ka^3\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi+\tfrac{\sqrt{2}}{2}Ka^3\operatorname{sen}\varphi+\tfrac{1}{2}Ka^3\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta-$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0 \qquad Ka^2\left(\sqrt{2}+\operatorname{sen}\theta+2\cos\varphi\right)=\sqrt{2}\,mg\,\operatorname{ctg}\varphi$$