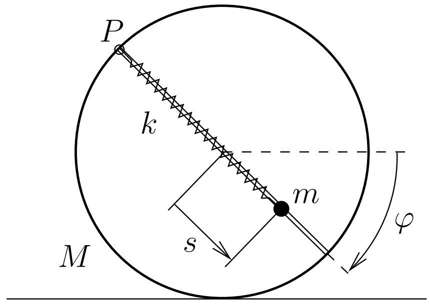
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (15 de Enero de 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un disco de radio R y masa M se mueve en todo momento en un plano vertical y rueda sin deslizar sobre una recta horizontal.
En el disco existe una ranura diametral lisa en la que se mueve una partícula pesada de masa m, que está unida a un punto P de la periferia mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural R. Se pide



Se pide, mediante la aplicación de los principios de Newton-Euler:

1. Calcular la reacción que la recta ejerce sobre el disco y la reacción que el disco ejerce sobre la partícula, en función de los grados de libertad y sus derivadas.

2. Obtener las ecuaciones del movimiento del sistema en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas, sin que en ellas aparezcan las reacciones.

⋆

1. El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo φ que forma la ranura con la horizontal y la distancia s de la partícula al centro del disco, como indica la figura del enunciado.

El planteamiento del principio de cantidad de movimiento a la partícula en dirección perpendicular a la ranura proporciona la reacción N del disco sobre aquella. Llamando a_τ a la componente de la aceleración de la partícula en dirección perpendicular a la ranura, se obtiene:

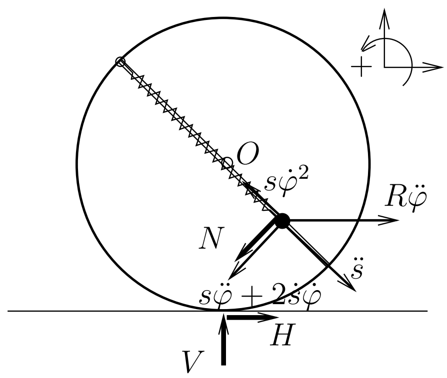


Figura 1: *Aceleración de la partícula y reacciones*

$$N + mg\cos\varphi = ma_\tau$$
$$N = m(s\ddot\varphi + 2\dot s\dot\varphi - R\ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi) - mg\cos\varphi \qquad (1)$$

La reacción horizontal H que ejerce la recta sobre el disco se obtiene directamente empleando (1) y planteando el principio del momento cinético al disco únicamente en su centro de masa:

$$HR + Ns = -\frac{1}{2}MR^2\ddot\varphi \quad\rightarrow\quad H = -\frac{1}{2}MR\ddot\varphi - ms\left(\frac{s}{R}\ddot\varphi + \frac{2\dot s\dot\varphi}{R} - \ddot\varphi\operatorname{sen}\varphi\right) + \frac{mg}{R}s\cos\varphi \quad (2)$$

La reacción vertical de la recta sobre el disco se obtiene planteando el principio de cantidad de movimiento al sistema completo de disco+partícula. Denotando a_v a la componente vertical de la aceleración de la partícula, resulta:

$$V - (M+m)g = ma_v \quad\rightarrow\quad V = (M+m)g + m[s\dot\varphi^2\operatorname{sen}\varphi - \ddot s\operatorname{sen}\varphi - (s\ddot\varphi + 2\dot s\dot\varphi)\cos\varphi] \quad (3)$$

2. Una ecuación del movimiento se obtiene al plantear el principio de cantidad de movimiento a la partícula según la ranura:

$$-ks + mg\operatorname{sen}\varphi = m(\ddot{s} + R\ddot{\varphi}\cos\varphi - s\dot{\varphi}^2) \tag{4}$$

La segunda ecuación puede obtenerse planteando el principio de cantidad de movimiento horizontal al conjunto disco+partícula, que resulta:

$$H = MR\ddot{\varphi} + m(R\ddot{\varphi} + \ddot{s}\cos\varphi - s\dot{\varphi}^2\cos\varphi - s\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi - 2\dot{s}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi) \tag{5}$$

Igualando (5) con (2) se obtiene la segunda ecuación del movimiento:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}\left(-\frac{3}{2}MR - \frac{ms^2}{R} - mR + 2ms\operatorname{sen}\varphi\right)& \\ - m\ddot{s}\cos\varphi + 2m\dot{s}\dot{\varphi}\left(-\frac{s}{R} + \operatorname{sen}\varphi\right) + ms\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{mg}{R}s\cos\varphi &= 0\end{aligned} \tag{6}$$

Por supuesto, una ecuación del movimiento alternativa perfectamente válida, que podría sustituir a (4) ó (6), es la que expresa la conservación de la energía total del sistema disco+partícula, al ser todas las fuerzas que trabajan (peso y fuerza del muelle) conservativas.