

# Índice general

## I. Métodos Generales de la Dinámica

<b>1. Principios de la mecánica</b>	<b>1.1</b>
1.1. La mecánica como teoría científica . . . . .	1.1
1.2. Sistemas de referencia; espacio y tiempo . . . . .	1.5
1.3. Principio de la relatividad de Galileo . . . . .	1.6
1.4. Las leyes de Newton . . . . .	1.8
1.5. Conceptos de masa y fuerza . . . . .	1.11
1.6. La ley de la gravitación universal . . . . .	1.15
1.6.1. Masa gravitatoria y masa inerte. . . . .	1.17
<b>2. Dinámica de la partícula</b>	<b>2.1</b>
2.1. Principios y teoremas generales . . . . .	2.2
2.1.1. Cantidad de movimiento . . . . .	2.2
2.1.2. Momento cinético . . . . .	2.3
2.1.3. Energía cinética . . . . .	2.6
2.2. Expresiones de velocidad y aceleración . . . . .	2.11
2.2.1. Coordenadas cartesianas. . . . .	2.11
2.2.2. Coordenadas cilíndricas y polares. . . . .	2.12
2.2.3. Coordenadas esféricas. . . . .	2.13
2.2.4. Triedro intrínseco . . . . .	2.14
2.3. Movimiento de una partícula libre . . . . .	2.17
2.3.1. proyectil pesado en el vacío. . . . .	2.17
2.3.2. proyectil pesado en medio resistente . . . . .	2.20
2.4. Movimiento de una partícula sobre una curva . . . . .	2.24
2.5. Movimiento de una partícula sobre una superficie . . . . .	2.30
2.6. Problemas propuestos. . . . .	2.33
<b>3. Oscilaciones lineales con 1 grado de libertad</b>	<b>3.1</b>
3.1. El oscilador armónico simple . . . . .	3.2

3.1.1.	Ecuación del movimiento . . . . .	3.2
3.1.2.	Energía . . . . .	3.3
3.1.3.	Integración de la ecuación . . . . .	3.4
3.2.	Oscilaciones en 2 dimensiones . . . . .	3.6
3.3.	Oscilaciones con amortiguamiento . . . . .	3.9
3.3.1.	Ecuación del movimiento . . . . .	3.9
3.3.2.	Integración de la ecuación . . . . .	3.10
3.4.	Oscilaciones forzadas . . . . .	3.16
3.4.1.	Ecuación del movimiento . . . . .	3.16
3.4.2.	Integración de la ecuación . . . . .	3.16
3.5.	Amplificación dinámica y resonancia . . . . .	3.20
3.6.	El espacio de las fases . . . . .	3.26
3.7.	Análisis mediante series de Fourier . . . . .	3.29
3.7.1.	Carácter lineal de las ecuaciones . . . . .	3.29
3.7.2.	Análisis de series de armónicos . . . . .	3.30
3.7.3.	Desarrollo en serie de Fourier . . . . .	3.31
3.8.	Análisis de transitorios mediante la función de Green . . . . .	3.34
3.8.1.	Respuesta a una función impulso . . . . .	3.34
3.8.2.	Análisis de transitorios para una excitación arbitraria . . . . .	3.35
3.9.	Métodos numéricos para integración directa . . . . .	3.37
3.9.1.	Método de Euler . . . . .	3.38
3.9.2.	Método de Runge-Kutta . . . . .	3.39
3.10.	Problemas propuestos. . . . .	3.40
<b>4.</b>	<b>Cinemática de sistemas rígidos</b> . . . . .	<b>4.1</b>
4.1.	Derivación de vectores en sistemas móviles . . . . .	4.1
4.2.	Velocidad y aceleración en sistemas móviles . . . . .	4.6
4.3.	Campo de velocidades del sólido rígido . . . . .	4.9
4.3.1.	Movimiento helicoidal tangente . . . . .	4.10
4.3.2.	Axoides del movimiento . . . . .	4.13
4.4.	Campo de aceleraciones del sólido rígido . . . . .	4.16
4.5.	Composición de movimientos . . . . .	4.18
4.5.1.	Composición del movimiento de 2 sistemas . . . . .	4.18
4.5.2.	Composición del movimiento de $n$ sistemas . . . . .	4.18
4.5.3.	Movimiento de sólidos tangentes . . . . .	4.21
4.6.	Movimiento plano . . . . .	4.25
4.6.1.	Centro instantáneo de rotación . . . . .	4.26
4.6.2.	Curvas polares . . . . .	4.26
4.6.3.	Aceleraciones . . . . .	4.29
4.7.	Problemas propuestos. . . . .	4.40

<b>5. Fuerzas centrales y órbitas gravitatorias</b>	<b>5.1</b>
5.1. Reducción del sistema binario . . . . .	5.1
5.1.1. Sistema binario gravitatorio . . . . .	5.4
5.2. Movimiento bajo fuerzas centrales . . . . .	5.6
5.2.1. Propiedades del movimiento . . . . .	5.6
5.2.2. Ecuaciones del movimiento . . . . .	5.7
5.2.3. Fórmula de Binet . . . . .	5.9
5.3. Órbitas gravitatorias . . . . .	5.10
5.4. Energía de las órbitas gravitatorias . . . . .	5.14
5.4.1. Potencial efectivo . . . . .	5.19
5.5. Leyes de Kepler . . . . .	5.21
5.6. Ecuaciones horarias . . . . .	5.23
5.6.1. Trayectoria elíptica . . . . .	5.23
5.6.2. Movimiento hiperbólico . . . . .	5.25
5.6.3. Movimiento parabólico . . . . .	5.26
5.7. Estudio del sistema ternario . . . . .	5.27
5.7.1. Planteamiento de las ecuaciones . . . . .	5.28
5.7.2. Movimiento alineado . . . . .	5.29
5.7.3. Movimiento equilátero . . . . .	5.30
5.8. Problemas propuestos. . . . .	5.32
<b>6. Teoremas generales de dinámica de sistemas.</b>	<b>6.1</b>
6.1. Morfología de los sistemas . . . . .	6.1
6.1.1. Sistema mecánico . . . . .	6.2
6.1.2. Fuerzas . . . . .	6.2
6.1.3. Enlaces . . . . .	6.3
6.2. Principios y teoremas de la dinámica de Newton-Euler . . . . .	6.9
6.2.1. Principio de la cantidad de movimiento . . . . .	6.9
6.2.2. Principio del momento cinético . . . . .	6.12
6.2.3. Teorema de la energía cinética . . . . .	6.15
6.2.4. Teorema del virial . . . . .	6.20
6.3. El sistema del centro de masas . . . . .	6.22
6.3.1. Cantidad de movimiento . . . . .	6.23
6.3.2. Momento cinético . . . . .	6.23
6.3.3. Energía cinética . . . . .	6.26
6.3.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano . . . . .	6.27
6.3.5. Constantes del movimiento en sistemas aislados . . . . .	6.36
6.4. Trabajos virtuales . . . . .	6.37
6.4.1. El principio de los trabajos virtuales . . . . .	6.39
6.4.2. El principio de D'Alembert . . . . .	6.40

6.5.	Dinámica en sistemas no inerciales. . . . .	6.44
6.5.1.	Dinámica de la partícula . . . . .	6.44
6.5.2.	Dinámica de sistemas de varias partículas . . . . .	6.46
6.5.3.	Ejes ligados a la superficie de la tierra . . . . .	6.47
6.6.	Sistemas de masa variable . . . . .	6.53
6.6.1.	Sistema puntual: ecuación fundamental . . . . .	6.53
6.6.2.	Sistema con masa distribuida . . . . .	6.54
6.6.3.	Aplicaciones . . . . .	6.56
6.7.	Problemas propuestos. . . . .	6.59
<b>7.</b>	<b>Dinámica analítica</b>	<b>7.1</b>
7.1.	Coordenadas generalizadas . . . . .	7.2
7.2.	Ecuaciones de Lagrange . . . . .	7.7
7.2.1.	El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas . . . . .	7.7
7.2.2.	Forma básica de las ecuaciones de Lagrange . . . . .	7.9
7.2.3.	Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana . . . . .	7.10
7.2.4.	Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento	7.17
7.2.5.	Integrales primeras . . . . .	7.20
7.2.6.	Teorema de Noether . . . . .	7.25
7.2.7.	Sistemas naturales . . . . .	7.26
7.2.8.	Sistemas giroscópicos . . . . .	7.28
7.3.	Potencial dependiente de la velocidad . . . . .	7.31
7.4.	Sistemas con ligaduras . . . . .	7.34
7.4.1.	Método de los mUltiplicadores de Lagrange . . . . .	7.35
7.5.	Introducción al cálculo de variaciones . . . . .	7.40
7.5.1.	Los principios variacionales . . . . .	7.40
7.5.2.	El problema fundamental del cálculo de variaciones .	7.41
7.6.	El principio de Hamilton . . . . .	7.45
7.6.1.	Las ecuaciones de lagrange a partir del principio de Hamilton . . . . .	7.46
7.6.2.	Generalización del principio de Hamilton . . . . .	7.47
7.7.	La dinámica a partir del principio de Hamilton . . . . .	7.49
7.7.1.	Estructura de la función Lagrangiana . . . . .	7.50
7.7.2.	Teoremas de conservación . . . . .	7.53
7.8.	Problemas propuestos. . . . .	7.56

## II. Aplicaciones de la Dinámica y Estática

<b>8. Dinámica del sólido rígido</b>	<b>8.1</b>
8.1. Conceptos generales . . . . .	8.1
8.1.1. Ecuaciones cardinales de la dinámica . . . . .	8.2
8.2. Expresión de las magnitudes cinéticas . . . . .	8.4
8.2.1. Movimiento de rotación instantánea . . . . .	8.4
8.2.2. Movimiento general (rotación y traslación) . . . . .	8.7
8.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo . . . . .	8.7
8.3. El tensor de inercia . . . . .	8.8
8.4. Propiedades del tensor de inercia . . . . .	8.13
8.4.1. Momentos y productos de inercia . . . . .	8.13
8.4.2. Elipsoide de inercia . . . . .	8.15
8.4.3. Ejes principales de inercia . . . . .	8.16
8.4.4. Simetrías de masas . . . . .	8.19
8.5. Campo tensorial de inercia . . . . .	8.22
8.6. Rotación finita del sólido . . . . .	8.26
8.6.1. Rotaciones infinitesimales y su composición . . . . .	8.26
8.6.2. Composición de rotaciones finitas . . . . .	8.29
8.6.3. La Rotación finita como cambio de base . . . . .	8.30
8.6.4. La Rotación finita como transformación ortogonal . . . . .	8.32
8.6.5. Teorema de Euler . . . . .	8.34
8.6.6. Relación entre rotaciones finitas e infinitesimales . . . . .	8.36
8.6.7. Parametrización de la rotación; fórmula de Rodrigues y parámetros de Euler . . . . .	8.38
8.6.8. Ángulos de Euler . . . . .	8.40
8.6.9. Expresiones de la velocidad de rotación . . . . .	8.44
8.7. Ecuaciones de la dinámica . . . . .	8.46
8.7.1. Ecuaciones de Euler . . . . .	8.47
8.7.2. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro in- termedio . . . . .	8.48
8.7.3. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro fijo . . . . .	8.50
8.7.4. Ecuaciones de Lagrange . . . . .	8.51
8.7.5. Cálculo de reacciones en los enlaces . . . . .	8.52
<b>9. Aplicaciones de la dinámica del sólido</b>	<b>9.1</b>
9.1. Movimiento por inercia; descripción de Poincot. . . . .	9.1
9.1.1. Propiedades del movimiento . . . . .	9.1
9.1.2. Ejes permanentes de rotación . . . . .	9.6
9.1.3. Ecuaciones del movimiento . . . . .	9.9

9.2.	Dinámica del sólido en sistemas no inerciales . . . . .	9.12
9.3.	El giróscopo . . . . .	9.16
9.3.1.	Ecuaciones del movimiento de una peonza . . . . .	9.16
9.3.2.	Efecto giroscópico . . . . .	9.20
9.3.3.	Estabilidad de la peonza dormida . . . . .	9.25
9.4.	El péndulo esférico . . . . .	9.26
<b>10.</b>	<b>Dinámica de impulsiones</b>	<b>10.1</b>
10.1.	Introducción . . . . .	10.1
10.2.	Teoría de impulsiones . . . . .	10.2
10.2.1.	Impulsión sobre una partícula . . . . .	10.2
10.2.2.	Fuerzas impulsivas; función delta de Dirac . . . . .	10.3
10.2.3.	Axiomática . . . . .	10.5
10.2.4.	Teorema fundamental . . . . .	10.5
10.2.5.	Aplicación del principio de los trabajos virtuales . . . . .	10.7
10.2.6.	Aplicación del principio de la cantidad de movimiento . . . . .	10.8
10.2.7.	Aplicación del principio del momento cinético . . . . .	10.8
10.3.	Consideraciones energéticas . . . . .	10.9
10.3.1.	Energía cinética . . . . .	10.9
10.3.2.	Coefficiente de restitución . . . . .	10.11
10.3.3.	Teorema de Carnot . . . . .	10.13
10.4.	Choque entre sólidos rígidos . . . . .	10.14
10.4.1.	La deformabilidad de los sólidos . . . . .	10.14
10.4.2.	Caso general de choque entre dos sólidos . . . . .	10.16
10.4.3.	Choque directo . . . . .	10.17
10.4.4.	Impulsiones tangenciales . . . . .	10.19
10.5.	Dinámica analítica de impulsiones . . . . .	10.19
<b>11.</b>	<b>Oscilaciones lineales con varios grados de libertad</b>	<b>11.1</b>
11.1.	Ecuaciones del movimiento . . . . .	11.1
11.1.1.	Linealización de las ecuaciones . . . . .	11.1
11.1.2.	Formulación matricial . . . . .	11.4
11.2.	Oscilaciones libres . . . . .	11.7
11.2.1.	Oscilaciones sin amortiguamiento; problema de autovalores . . . . .	11.7
11.2.2.	Frecuencias propias y modos normales de vibración . . . . .	11.9
11.2.3.	Caso de autovalores múltiples . . . . .	11.15
11.2.4.	Análisis modal; coordenadas normales . . . . .	11.16
11.2.5.	Condiciones iniciales . . . . .	11.20
11.2.6.	Oscilaciones libres con amortiguamiento . . . . .	11.21

11.3. Oscilaciones forzadas . . . . .	11.25
11.3.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; Resonancia . . . . .	11.25
11.3.2. Oscilaciones con amortiguamiento; régimen transitorio y permanente . . . . .	11.26
11.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias . . . . .	11.28
<b>12. Ecuaciones de Hamilton</b>	<b>12.1</b>
12.1. Introducción . . . . .	12.1
12.2. La transformada de Legendre y sus propiedades . . . . .	12.2
12.3. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	12.3
12.4. Obtención práctica de las ecuaciones . . . . .	12.6
12.5. Integrales primeras . . . . .	12.7
12.6. Generalización para fuerzas no conservativas . . . . .	12.8
12.7. El método de Routh . . . . .	12.9
12.8. El principio de Hamilton aplicado a la función hamiltoniana . . . . .	12.11
12.9. Estructura de las ecuaciones canónicas . . . . .	12.12
12.9.1. Transformaciones canónicas . . . . .	12.13
12.10. Ejemplos . . . . .	12.15
<b>13. Estática</b>	<b>13.1</b>
13.1. Consideraciones generales . . . . .	13.1
13.2. Condiciones analíticas del equilibrio . . . . .	13.4
13.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz . . . . .	13.5
13.3. Estabilidad del equilibrio . . . . .	13.6
13.3.1. Concepto de estabilidad . . . . .	13.6
13.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet . . . . .	13.8
13.4. Equilibrio de una partícula . . . . .	13.11
13.4.1. Partícula libre . . . . .	13.11
13.4.2. Partícula ligada a una superficie . . . . .	13.12
13.4.3. Partícula ligada a una curva . . . . .	13.14
13.5. Equilibrio de un sistema de partículas . . . . .	13.16
13.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática . . . . .	13.16
13.5.2. Principio de los trabajos virtuales . . . . .	13.18
13.6. Equilibrio del sólido rígido . . . . .	13.20
13.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales . . . . .	13.20
13.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos . . . . .	13.22
13.7. Reacciones en los enlaces . . . . .	13.24
13.7.1. Enlaces lisos . . . . .	13.25
13.7.2. Enlaces con resistencias pasivas; rozamiento . . . . .	13.29

13.8. Sistemas de barras articuladas . . . . .	13.34
13.8.1. Clasificación . . . . .	13.34
13.8.2. Método de los nudos . . . . .	13.37
13.8.3. Método de las secciones . . . . .	13.38
<b>14. Estática de hilos</b>	<b>14.1</b>
14.1. Consideraciones generales . . . . .	14.1
14.2. Ecuaciones de equilibrio bajo cargas continuas . . . . .	14.2
14.2.1. Ecuación vectorial del equilibrio . . . . .	14.2
14.2.2. Ecuaciones en coordenadas intrínsecas . . . . .	14.4
14.2.3. Ecuaciones en coordenadas cartesianas . . . . .	14.5
14.2.4. Casos de fuerzas conservativas . . . . .	14.6
14.2.5. Casos de fuerzas centrales o paralelas . . . . .	14.7
14.2.6. Analogía dinámica . . . . .	14.10
14.3. Configuraciones de equilibrio de hilos . . . . .	14.10
14.3.1. Hilo homogéneo sometido a peso propio (catenaria) . . . . .	14.10
14.3.2. Hilo sometido a carga constante por unidad de abscisa (parábola) . . . . .	14.15
14.3.3. Efecto de cargas puntuales . . . . .	14.22
14.3.4. Algunos tipos de condiciones de apoyo en los extremos	14.24
14.4. Hilos apoyados sobre superficies . . . . .	14.28
14.4.1. Superficie lisa sin cargas . . . . .	14.28
14.4.2. Superficie lisa con cargas . . . . .	14.28
14.4.3. Enrollamiento sobre tambor rugoso . . . . .	14.31
<b>A. Resumen de álgebra vectorial y tensorial</b>	<b>A.1</b>
A.1. Escalares, puntos y vectores . . . . .	A.1
A.2. Producto escalar y vectorial . . . . .	A.2
A.3. Bases y coordenadas . . . . .	A.2
A.4. Tensores de orden dos . . . . .	A.3
A.5. Cambio de base . . . . .	A.5
A.6. Operaciones y clases especiales de tensores . . . . .	A.7
A.7. Cambio de coordenadas de un tensor . . . . .	A.7
A.8. Coeficientes de permutación . . . . .	A.8
A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor . . . . .	A.8
A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico . . . . .	A.9
A.11. Traza y determinante . . . . .	A.10