

Capítulo 13

Estática

13.1. Consideraciones generales

En los capítulos precedentes se ha estudiado la descripción del movimiento (cinemática), las magnitudes que caracterizan al mismo en sistemas materiales (cinética), y la evolución de estas magnitudes con el tiempo (dinámica).

En este capítulo se estudiará la estática o equilibrio de los sistemas, entendida como la ausencia de movimiento. Se trata por tanto de un caso particular de la dinámica, pero que por su importancia merece un tratamiento especial.

DEFINICIÓN:

Se dice que un sistema material está en equilibrio cuando todas sus partículas se encuentran en reposo, y permanecen en el mismo estado de reposo.

Para que se verifique el equilibrio y éste sea estable han de darse una serie de condiciones, cuyo análisis constituye el objeto de la estática. Ésta permitirá analizar diversos tipos de problemas:

1. Para un sistema sometido a un conjunto de fuerzas dadas, establecer la *existencia* de una o más posibles configuraciones de equilibrio y determinar éstas.
2. Analizar la *estabilidad* de las posiciones de equilibrio. El concepto de estabilidad consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo

a dicha configuración, o si por el contrario se aleja indefinidamente de la misma.

3. Para un sistema en una configuración geométrica determinada, determinar las *acciones necesarias* (tanto en lo que respecta a fuerzas activas como a reacciones) para el equilibrio y su estabilidad.

Las aplicaciones prácticas de la estática en la ingeniería son muy numerosas, siendo quizá la parte de la mecánica más empleada. Esto es así especialmente en la ingeniería civil y en el análisis estructural: por lo general las estructuras se diseñan para estar y permanecer en reposo bajo las cargas de servicio estáticas, o para que su movimiento bajo cargas dinámicas sea pequeño y estable (vibraciones).

Los principios generales de la dinámica de sistemas, desarrollados en los capítulos anteriores permiten, mediante su particularización a las condiciones de la estática, establecer las condiciones generales del equilibrio. En concreto, para un sistema general de varias partículas (digamos N), la aplicación del principio de la cantidad de movimiento a cada partícula (ecuación (6.3)), para las condiciones particulares del equilibrio ($d\mathbf{v}_i/dt = \mathbf{0}$), da lugar a una condición necesaria: $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Por otra parte, si el sistema parte de un estado inicial de reposo ($\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$) la condición anterior es también suficiente. Podemos adoptar por lo tanto con carácter general como condición de equilibrio (necesaria y suficiente) la anulación de la resultante de las fuerzas ejercidas sobre cada partícula:

$$\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}, \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \iff \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (13.1)$$

En los sistemas reales con infinitas partículas (p. ej., sólidos rígidos considerados como medios continuos) es preciso reducir las condiciones generales para el equilibrio expresadas arriba a un número menor de condiciones, de forma que sea abordable el problema mediante los métodos de la mecánica de sistemas discretos estudiados en este curso¹. En cualquier caso, el estudio de las fuerzas será esencial para las condiciones de equilibrio.

Ya se estableció una clasificación somera de las fuerzas en un sistema en el apartado 6.1. Sin embargo, recordaremos aquí algunos conceptos que nos serán útiles para la estática. En primer lugar, es posible clasificar las fuerzas

¹Se puede estudiar la estática (y también la dinámica) en medios continuos, mediante ecuaciones en derivadas parciales o formulaciones débiles equivalentes como el principio de los trabajos virtuales. Entre los procedimientos de resolución, el más potente en la actualidad es el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.), especialmente adecuado para su tratamiento numérico en ordenadores.

en fuerzas *activas* o *directamente aplicadas*, y fuerzas *pasivas*, también llamadas *reacciones* o *fuerzas de ligadura*. Las primeras son las que tienen un valor conocido, variables con el tiempo o no (por ejemplo, cargas exteriores ejercidas sobre el sistema), o posiblemente en función de la configuración o estado del sistema (por ejemplo, fuerzas internas en muelles o amortiguadores). Por el contrario, se consideran reacciones las que sirven para imponer una determinada ligadura o apoyo, y cuyo valor debe calcularse imponiendo las ecuaciones de equilibrio compatibles con dicha ligadura (o de la dinámica si el problema no es estático).

Otra clasificación de las fuerzas a tener en cuenta es como *interiores* y *exteriores*. El primer caso engloba a todas las que provienen de partículas dentro del propio sistema, tanto por acciones de contacto, acciones a distancia (por ejemplo, atracción gravitatoria), o mediante elementos discretos como resortes o amortiguadores. En este caso tanto la acción como la reacción que postula la tercera ley de Newton se ejercen entre partículas del sistema. Por el contrario, se denomina fuerza exterior a la que proviene de puntos externos al sistema, y la reacción a la misma no se ejerce por tanto sobre el sistema. Tanto las fuerzas activas como las reacciones pueden ser a su vez interiores o exteriores, siendo ambas clasificaciones independientes. Así, las ligaduras pueden provenir de partículas del mismo sistema (por ejemplo, distancias constantes entre puntos de un sólido rígido) o de fuera del mismo (por ejemplo, apoyos o sustentaciones externas).

Otro elemento importante para el análisis del equilibrio son las *ligaduras* o *enlaces*. Ya se habló sobre ellas en el apartado 6.1, por lo que sólo recordaremos aquí los aspectos fundamentales. Establecíamos allí la clasificación entre enlaces *holónomos*, funciones que imponían condiciones entre coordenadas y tiempo:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad (13.2)$$

y enlaces *anholónomos*, funciones que adicionalmente dependían de las velocidades:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0 \quad (13.3)$$

Asimismo, en función de su variación temporal, los enlaces se denominan *reónomos* si dependen explícitamente del tiempo ($\partial\phi/\partial t \neq 0$) o *esclerónomos* si no varían con el tiempo ($\partial\phi/\partial t = 0$). Por último, denominamos *lisos* a los enlaces cuyas fuerzas de reacción no realizan trabajo para los movimientos permitidos por los mismos, mientras que serán *rugosos* en caso contrario. Para que tenga sentido esta última clasificación, es obvio que el enlace debe permitir algún movimiento, ya que en caso contrario no cabe hablar de trabajo. Para ilustrar esta última clasificación, considérese un apoyo

deslizante, que puede ser liso o con rozamiento entre las superficies; por el contrario, si el apoyo restringe todos los movimientos del punto en cuestión se convierte en un *empotramiento*, al cual no tiene sentido calificarlo como liso ni rugoso.

13.2. Condiciones analíticas del equilibrio

En el capítulo 7 se estudió la formulación analítica de la mecánica, en relación con la dinámica. Recordemos que la base de dicho planteamiento, debido originalmente al matemático francés Lagrange, es la descripción de la configuración del sistema mediante un conjunto reducido de *coordenadas generalizadas*, para las que empleamos la notación $\{q_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), que sirven para definir de manera unívoca la configuración. Estas coordenadas pueden, en principio, representar magnitudes físicas diversas (longitudes, ángulos, distancias al cuadrado, ...), no estando restringidas a sistemas de coordenadas algebraicas ni a bases de espacios vectoriales.

La ventaja fundamental del uso de coordenadas generalizadas es que en su propia elección está incluida toda o a menos gran parte de la información de los enlaces. Cuando los enlaces son holónomos, de las ecuaciones (13.2) que los expresan podemos “eliminar” las coordenadas dependientes; de esta forma, restan al final únicamente las coordenadas independientes o *grados de libertad* del sistema. Si existen además enlaces anholónomos propiamente dichos (es decir, no integrables) no será posible eliminar las coordenadas redundantes y será preciso mantener sus ecuaciones de ligadura de manera explícita, para solucionarlas finalmente junto con las ecuaciones de la dinámica mediante multiplicadores de Lagrange (ver apartado 7.4).

En cualquier caso, el estudio de un sistema mediante coordenadas generalizadas permite un marco ventajoso para establecer las condiciones de equilibrio, ya que por lo general nos restringiremos al mínimo número de condiciones. Sean las coordenadas generalizadas libres o no, por lo general son un número mucho más reducido que el de las coordenadas cartesianas de todas las partículas del sistema; normalmente, serán además un conjunto discreto y finito de coordenadas, en lugar de un número infinito como por ejemplo el que corresponde a las partículas de un sólido considerado como un medio continuo.

Puesto que la relación entre las configuraciones o posiciones del sistema y las coordenadas generalizadas $\mathbf{r}_i(q_j)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$) es unívoca, es obvio que la definición de equilibrio (13.1) dada en el apartado anterior es equivalente a exigir que las coordenadas generalizadas sean constantes y

permanezcan constantes:

$$\boxed{\dot{q}_j = 0; \quad \ddot{q}_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)} \quad (\text{condición de equilibrio}) \quad (13.4)$$

Para establecer la restricción que esta condición impone a las fuerzas, partimos de las ecuaciones de Lagrange (7.12):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (13.5)$$

donde Q_j son las fuerzas generalizadas (ecuación (7.7)) y T es la energía cinética. Esta última viene dada, en el caso en que los enlaces no dependan del tiempo, mediante (7.33)²:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

donde los coeficientes a_{kl} son simétricos, y pueden ser función a su vez de las coordenadas, $a_{kl}(q_j)$. Sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange (13.5),

$$\frac{da_{kj}}{dt} \dot{q}_k + a_{kj} \ddot{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_j$$

y empleando la condición de equilibrio (13.4) se llega a la condición equivalente

$$\boxed{Q_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)} \quad (13.6)$$

Es fácil ver también que, si $Q_j = 0$ y se parte de condiciones iniciales de reposo ($\dot{q}_j(0) = 0$), puesto que la matriz de coeficientes a_{kl} es regular, ha de ser $\ddot{q}_j = 0$. Por lo tanto, la anulación de las fuerzas generalizadas (13.6) es necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema, pudiendo considerarse como una condición equivalente a (13.4).

13.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz

Acabamos de ver que si se anulan las fuerzas generalizadas ($Q_j = 0$) existe solución estática o de equilibrio. Sin embargo, no queda demostrado desde el punto de vista matemático la unicidad de esta solución. Podría, en teoría, existir otra solución que fuese dinámica.

Desde un punto de vista físico determinista la falta de unicidad no tiene sentido, pues supondría que a partir de condiciones iniciales dadas es imposible predecir el estado o la evolución de un sistema. Esto de hecho ocurre

²al igual que en capítulos anteriores, adoptaremos aquí el convenio de sumatorio implícito para los índices repetidos

en la dinámica para el caso de los sistemas caóticos, en los que el desorden (“caos”) se debe en realidad a una gran sensibilidad frente a perturbaciones pequeñas, haciéndose en la práctica impredecible su evolución.

Veamos un sencillo ejemplo de sistema que posee solución no única, estática y dinámica:

$$m\ddot{x} = k \left| \sqrt{|x|} \right|, \quad \text{siendo } m, k > 0 \quad (13.7)$$

La solución estática es obviamente:

$$x = 0$$

Sin embargo, existe asimismo una solución dinámica dada por:

$$x = \frac{k^2}{144m^2} t^4$$

basta sustituir en (13.7) para comprobar que esta solución cumple efectivamente la ecuación.

Matemáticamente, la condición de unicidad se expresa por la *Condición de Lipschitz*:

Se dice que una función $Q(q_i, t)$, definida en un Dominio \mathcal{D} cumple la condición de Lipschitz respecto de las variables $\{q_i\}$ si se puede encontrar una constante k tal que $\forall q_i \in \mathcal{D}$ y $\forall \Delta q_i$,

$$|Q(q_i + \Delta q_i, t) - Q(q_i, t)| \leq k \sum_i |\Delta q_i| \quad (13.8)$$

La constante k se denomina constante de Lipschitz.

Si el Dominio \mathcal{D} es convexo, un requisito suficiente para la condición de Lipschitz es que existan derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial q_i}$, y que estén acotadas en \mathcal{D} .

La función (13.7) propuesta en el ejemplo anterior no podemos garantizar que cumple la condición de Lipschitz en $x = 0$, pues no existe allí su derivada. por tanto, no está garantizada la unicidad de la solución, que de hecho hemos visto no es única.

13.3. Estabilidad del equilibrio

13.3.1. Concepto de estabilidad

Una perturbación del equilibrio en que se alteren las coordenadas $\{q_i\}$, o bien se ponga en movimiento el sistema con velocidades iniciales $\{\dot{q}_i \neq 0\}$,

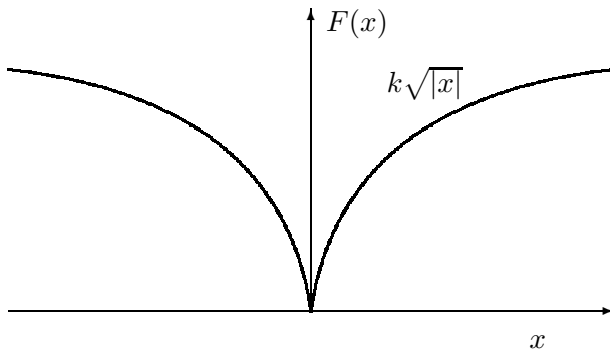


Figura 13.1: Sistema gobernado por la ecuación $m\ddot{x} = k\sqrt{|x|}$; la solución estática en $x = 0$ no es única, debido a la no derivabilidad de la función de fuerza en este punto.

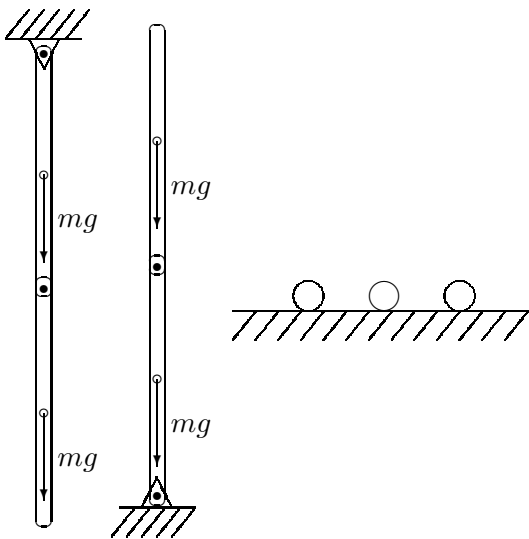


Figura 13.2: Ejemplos de equilibrio estable, inestable e indiferente.

dará lugar a una evolución dinámica del sistema, en la que obviamente la configuración varía respecto de la posición de equilibrio.

Se dice que el equilibrio es *estable* cuando la variación respecto de la posición de equilibrio está acotada, llegando a ser tan pequeña como queramos al hacer la perturbación suficientemente pequeña. En términos más precisos, y suponiendo que la posición de equilibrio corresponde a $\{q_i = 0\}$, diremos que el equilibrio es estable si para un valor ϵ tan pequeño como se desee es posible encontrar un valor δ de forma que:

$$\forall \epsilon, \exists \delta \text{ tal que } |q_{0i}| < \delta, \quad |\dot{q}_{0i}| < \delta \Rightarrow |q_i| < \epsilon$$

En este caso lo que ocurre es que las fuerzas que se originan en esta perturbación tienden a devolver al sistema a su posición de equilibrio.

Por el contrario, se dice que el equilibrio es *inestable* cuando la confi-

guración del sistema no está acotada, aún para una perturbación pequeña, perdiéndose por tanto la posición de equilibrio. Las fuerzas tienden a separar el sistema de su posición de equilibrio.

Por último, cabe hablar también de equilibrio *indiferente*, referido a perturbaciones en que se alteran tan sólo las coordenadas, pero no las velocidades. En este caso las nuevas posiciones, cercanas a la posición original de equilibrio siguen siendo de equilibrio.

Restringiéndonos al caso en que las fuerzas provengan de un potencial V ($Q_i = -\partial V/\partial q_i$), es inmediato observar que la condición de equilibrio (13.6) exige que éste adopte un valor estacionario en la posición de equilibrio:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i=0} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (13.9)$$

El problema de la estabilidad del equilibrio es en realidad un problema de dinámica, como se ha observado arriba, puesto que una vez que se perturba la posición de equilibrio, aunque sea ligeramente, se pierden las condiciones estáticas (13.4).

13.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet

Supongamos un sistema en que las fuerzas provienen de un potencial V : $Q_i = -\partial V/\partial q_i$, y que además es autónomo: $\partial V/\partial t = 0$. Sabemos que en el equilibrio debe cumplirse $\partial V/\partial q_i = 0$, por lo cual V adopta un valor estacionario en dicho punto. La condición analítica para la estabilidad del equilibrio viene dada por el teorema de Lejeune-Dirichlet, que afirma:

“Si el potencial V es mínimo en la posición de equilibrio, ésta es estable”

Cuando el potencial toma un valor estacionario correspondiente a un máximo, por el contrario, el equilibrio es inestable. En el caso en que V sea estacionario pero no corresponda ni a un mínimo ni a un máximo, el carácter del equilibrio es en principio dudoso, pudiendo corresponder a situaciones de equilibrio indiferente o inestable.

Veamos en primer lugar una justificación del teorema mediante un razonamiento sencillo e intuitivo, basado en la conservación de la energía total, $E = T + V$. Dicha energía debe conservarse, al provenir las fuerzas de un potencial autónomo. Supongamos una perturbación del equilibrio, que esté asociada bien a un cambio de las coordenadas $\{q_i\}$ o de las velocidades $\{\dot{q}_i\}$, o de ambas al tiempo. En cualquier caso, y asignando (sin pérdida de

generalidad) valor nulo al potencial en la posición de equilibrio, en ella la energía total es nula; la perturbación inicial del mismo está asociada a una energía pequeña $\epsilon = \Delta E$ de forma que en la evolución posterior (dinámica) se cumple:

$$\epsilon = T + V$$

Si en la posición de equilibrio $V|_0 = 0$ es un mínimo local, al separarse ligeramente del mismo será $V > 0$. Por otra parte la energía cinética también se anula en la posición de equilibrio y su carácter esencialmente positivo obliga igualmente a que sea $T > 0$. Al ser $T + V = \epsilon$, esto indica que ambos deben estar acotados:

$$T + V = \epsilon, \quad T > 0, V > 0 \quad \Rightarrow \quad T < \epsilon, V < \epsilon$$

La regularidad de V y T como funciones de las coordenadas y de las velocidades respectivamente hacen que esta condición sea equivalente a que las coordenadas y las velocidades se mantengan igualmente pequeñas, asegurando por tanto la estabilidad.

Por el contrario, si V está en un punto de máximo, al apartarse del equilibrio es $V < 0$, por lo cual la energía cinética T debe crecer para mantener la suma igual a ϵ , apartándose el sistema cada vez más de la posición de equilibrio, con lo que éste será inestable.

Es posible realizar una discusión algo más precisa de la estabilidad basándose en el desarrollo en serie de V (11.12):

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{0}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0}_{\stackrel{\text{def}}{=} k_{ij}} q_i q_j + \dots \quad (13.10)$$

Al linealizar el sistema despreciando en el desarrollo anterior los términos de orden superior al segundo, tal como se vió en el capítulo 11 al estudiar las pequeñas oscilaciones, el movimiento en general se puede describir como combinación lineal de exponenciales del tipo (11.22):

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_k C_k \{\mathbf{a}_k\} e^{i\sqrt{\lambda_k} t} \quad (13.11)$$

estando los autovalores λ_k definidos por la expresión (11.29):

$$\lambda_k = \frac{\{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{a}_k\}}{\{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_k\}} \quad (13.12)$$

donde el denominador debe ser positivo al corresponder la matriz $[\mathbf{M}]$ a la forma cuadrática de la energía cinética T (definida positiva). Si el numerador es positivo, por la definición de $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$ en (13.10), quiere decir que se trata de un mínimo del potencial. Esta situación corresponde a $\lambda_k > 0$ y por tanto $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} \in R$, por lo cual las soluciones dinámicas del movimiento son pequeñas oscilaciones armónicas, acotadas, del tipo (11.24):

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k)$$

Por el contrario, si el numerador en (13.12) fuese negativo, correspondiendo a un máximo de V , sería $\lambda_k < 0$, y sus raíces serían imaginarias, $\pm\sqrt{\lambda_k} = \pm i s_k$. Los sumandos correspondientes en la solución (13.11) serán

$$C_1 \{\mathbf{a}_k\} e^{s_k t} + C_2 \{\mathbf{a}_k\} e^{-s_k t}.$$

Este término no está acotado al incluir una exponencial creciente, lo que equivale a equilibrio inestable.

Puede teóricamente darse el caso de que V sea mínimo pero que el numerador en (13.12) sea nulo, siendo entonces los términos pares de orden superior al segundo en (13.10) los encargados de hacer cumplir la condición de mínimo, $\Delta V > 0$. La matriz $[k_{ij}]$ sería entonces semidefinida positiva, siendo preciso para evaluar la estabilidad un estudio más detallado de los términos de orden superior.

El hecho de que el potencial sea mínimo corresponde a que las fuerzas que se generan en el sistema al perturbar la posición de equilibrio,

$$Q_i \simeq \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} q_j,$$

que son fuerzas pequeñas (del orden de q_j), tiendan a recuperar la posición de equilibrio. Si existen además fuerzas de tipo viscoso (proporcionales a las velocidades \dot{q}_j) éstas no alteran la naturaleza del equilibrio puesto que son infinitésimas para alteraciones de las posiciones próximas al equilibrio. En efecto, producida una perturbación en coordenadas, estas fuerzas de tipo viscoso no tenderían ni a devolver ni a apartar al sistema de la posición de equilibrio si las velocidades son cero, o prácticamente cero.

Por el contrario, hay resistencias pasivas como el rozamiento que toman un valor finito ante cualquier intento de desplazamiento, en el sentido de impedir el mismo. En este caso sí pueden resultar estabilizadoras del equilibrio, creando lo que se puede llamar “zonas” de equilibrio estable (el equilibrio

estable se produce no sólo en el punto de mínimo potencial V , sino en un dominio finito en que las fuerzas de rozamiento garantizan la estabilidad).

Una consecuencia práctica inmediata del teorema de Lejeune-Dirichlet es el teorema de Torricelli, para sistemas sujetos al campo gravitatorio simplificado. Este afirma que

Para un un sistema sometido a un campo gravitatorio uniforme, las posiciones de equilibrio estable son las que corresponden a los mínimos de la altura (coordenada vertical) del centro de masas.

En efecto, el potencial del sistema es

$$V = \sum_i m_i g z_i = M g z_G$$

por lo cual, el mínimo de z_G coincide con el mínimo de V , lo que garantiza la estabilidad.

13.4. Equilibrio de una partícula

13.4.1. Partícula libre

Para fijar ideas desarrollaremos en la práctica los conceptos de equilibrio expuestos arriba, comenzando por el sistema más simple, una partícula o punto material libre. Las coordenadas generalizadas pueden ser las tres coordenadas cartesianas (x, y, z) , o bien las coordenadas en otro sistema como cilíndricas, esféricas, etc. (ver apartado 2.2).

La condición de equilibrio es

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{13.13}$$

donde \mathbf{F} es la resultante de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula. En general, \mathbf{F} será función de la posición de la partícula, lo cual nos permite plantear el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que define las posiciones de equilibrio.

Si \mathbf{F} (bien todas o algunas de sus componentes) depende a su vez del tiempo, es decir si se trata de un sistema no autónomo, para que haya equilibrio será necesario conseguir la anulación de $\mathbf{F}(t)$ en todo momento.

Si las fuerzas provienen de un potencial V , la condición de equilibrio (13.13) equivale a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \tag{13.14}$$

es decir, V ha de tomar un valor estacionario. Para que este equilibrio sea estable, tal y como hemos visto con anterioridad, este punto debe constituir un mínimo de V , lo que queda garantizado si la matriz de derivadas segundas es definida positiva:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix} > 0$$

Un resultado elemental de algebra matricial es que para que una matriz sea definida positiva todos sus menores principales han de ser positivos, lo cual en nuestro caso se traduce en tres inecuaciones, al ser la matriz de orden tres.

Conviene observar que, en el caso de emplear coordenadas curvilíneas y que estas no sean regulares en todo el dominio, en los puntos de singularidad no será posible aplicar el criterio anterior. Esto ocurre, por ejemplo, en coordenadas esféricas para los puntos de latitud $\lambda = \pm\pi/2$. En estos puntos es necesario realizar un cambio a otras coordenadas regulares para estudiar el equilibrio.

Por último, este caso sencillo permite hacerse una idea intuitiva de la naturaleza de las fuerzas estabilizadoras para una posición de equilibrio estable. En efecto, éstas quedan definidas por el gradiente de V con signo cambiado,

$$\mathbf{F} = -\frac{dV}{d\mathbf{r}} = -\mathbf{grad} V$$

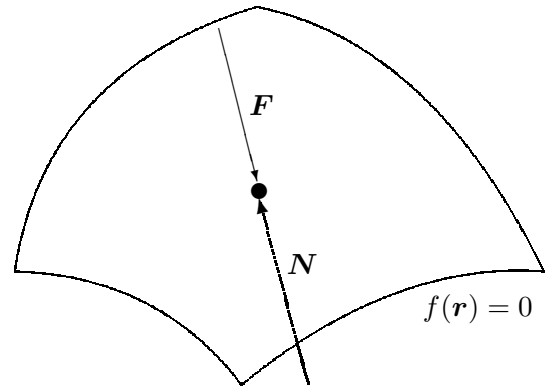
vector que va dirigido hacia los puntos de mínimo valor de V , es decir en dirección contraria a los puntos de máximo V . Por tanto, en el primer caso las fuerzas tienden a recuperar la posición de equilibrio, mientras que en el segundo alejan a la partícula de esta posición.

13.4.2. Partícula ligada a una superficie

Consideramos la superficie definida por la expresión analítica

$$f(\mathbf{r}) = 0 \tag{13.15}$$

Figura 13.3: *Partícula ligada a una superficie*



Supondremos una partícula ligada de forma bilateral a la superficie mediante un enlace liso, por lo que la reacción sobre la partícula será normal a la superficie:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f \quad (13.16)$$

La condición de equilibrio requiere la anulación de la resultante de sumar fuerzas aplicadas (\mathbf{F}) y reacción (\mathbf{N}):

$$\mathbf{F} + \lambda \mathbf{grad} f = \mathbf{0} \quad (13.17)$$

Las cuatro incógnitas (coordenadas (x, y, z) de la partícula y multiplicador λ) se resuelven mediante las cuatro ecuaciones escalares que se deducen de (13.15) y (13.17).

En el caso en que la ligadura no sea bilateral, pudiendo la partícula abandonar la superficie por una de sus caras, la reacción (13.16) no puede tomar un valor cualquiera, sino que se verá limitado a $\lambda \geq 0$ ó $\lambda \leq 0$ según la cara libre. El método a seguir en este caso es solucionar el problema igual que si la ligadura fuera bilateral, para comprobar después el signo de λ . Si éste es el adecuado, se da por válida la solución; si no, la partícula habría abandonado la superficie y se rehace el cálculo considerándola libre a partir de ese instante.

Por lo general, en lugar de resolver directamente para las cuatro variables (x, y, z, λ) , es preferible un planteamiento más sencillo empleando la definición paramétrica de la superficie, en función de dos parámetros u y v . Notemos que la ecuación (13.16) expresa simplemente que la fuerza aplicada \mathbf{F} ha de ser normal a la superficie, lo que equivale a que sea normal a dos vectores tangentes a la misma, $\partial \mathbf{r} / \partial u$ y $\partial \mathbf{r} / \partial v$:

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0, \quad \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad (13.18)$$

estas dos ecuaciones, en función de las variables u y v , definen las posiciones de equilibrio sobre la superficie. En el caso particular en que \mathbf{F} provenga de un potencial, (13.18) equivale a:

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V(u, v)}{\partial u} = 0,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V(u, v)}{\partial v} = 0;$$

es decir, equivale a que el potencial $V(u, v)$ expresado como función de las coordenadas (u, v) de la superficie, sea estacionario. De hecho, podríamos haber considerado desde un principio (u, v) como las dos coordenadas generalizadas del sistema, lo que nos habría conducido directamente al resultado anterior.

La estabilidad del equilibrio se estudiará mediante la matriz de derivadas segundas de (u, v) ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{pmatrix},$$

analizando si es definida positiva. Volvemos a hacer la observación, aquí más pertinente si cabe, de la comprobación de la regularidad de las coordenadas. En una superficie por lo general las coordenadas serán curvilíneas y es bastante común que existan puntos en los que el mapa paramétrico no sea regular.

Por último queda por estudiar el caso de que la superficie no sea lisa, existiendo una componente tangencial de la reacción debida al rozamiento. Dejaremos esto para más adelante, en el apartado 13.7 en que se tratarán las resistencias pasivas debidas al rozamiento.

13.4.3. Partícula ligada a una curva

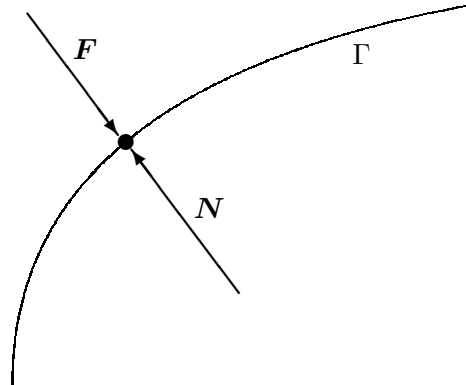
Consideramos la curva Γ definida por las ecuaciones

$$f(\mathbf{r}) = 0; \quad g(\mathbf{r}) = 0. \quad (13.19)$$

Supongamos una partícula ligada a Γ mediante una ligadura bilateral y lisa, por lo que la reacción normal de Γ sobre la partícula será normal a la curva. Esta normal, como sabemos, no es única, expresándose en general como combinación lineal:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g$$

Figura 13.4: *Partícula ligada a una curva Γ lisa: para el equilibrio la fuerza aplicada \mathbf{F} debe anular la reacción normal \mathbf{N} .*



para λ y μ arbitrarias. Si además actúa sobre la partícula una fuerza aplicada \mathbf{F} , el equilibrio requiere $\mathbf{F} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$, es decir

$$\mathbf{F} + \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g = \mathbf{0} \quad (13.20)$$

El problema queda planteado pues con 5 ecuaciones escalares (13.19) y (13.20) para las 5 incógnitas (x, y, z, λ, μ) .

En la práctica, el planteamiento expuesto arriba puede resultar demasiado engorroso, pudiendo ser preferible el empleo de la descripción paramétrica de la curva, en función de un parámetro u :

$$\Gamma : u \mapsto \mathbf{r}(u)$$

La expresión de equilibrio (13.20) establece simplemente que \mathbf{F} sea normal a la curva, cuya dirección en un punto viene definida por su tangente $d\mathbf{r}/du$. Por tanto, equivale a

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0 \quad (13.21)$$

resultando una única ecuación en función del parámetro u , que define el o los puntos de equilibrio.

En este caso, aunque $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ no se haya obtenido a partir de un potencial, admitiendo que sea una función continua, siempre será posible obtener una determinada función potencial definida sobre la curva,

$$V_1(u) = - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de forma que el equilibrio corresponde a los puntos en los que $V_1(u)$ es estacionario. En efecto, para un elemento $d\mathbf{r}$ sobre Γ ,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} du$$

por lo que la derivada de V_1 coincide con (13.21):

$$\frac{dV_1(u)}{du} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0$$

Si \mathbf{F} se obtuvo a partir de un potencial general en el espacio $V(\mathbf{r})$, lógicamente el potencial sobre la curva coincidirá con aquél:

$$V_1(u) = - \int -\mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = \int dV = V(\mathbf{r}(u))$$

La estabilidad del equilibrio corresponderá lógicamente a los mínimos de la función potencial,

$$\frac{d^2V_1}{du^2} > 0.$$

Por último, en los casos en que la ligadura no sea lisa y puedan existir fuerzas de reacción tangentes a la curva, habrá que proyectar las fuerzas aplicadas según la tangente para establecer la inecuación de rozamiento. Volveremos a este aspecto en el apartado 13.7 en que se trata del rozamiento.

13.5. Equilibrio de un sistema de partículas

13.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática

En el caso de un sistema de N partículas, el equilibrio del mismo equivale al de cada una de sus partículas:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (13.22)$$

donde \mathbf{F}_i es la fuerza total sobre cada partícula i , resultante de fuerzas exteriores e interiores:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int}$$

La aplicación de las condiciones de equilibrio (13.22) puede resultar muy trabajosa, al tenerse que realizar para cada una de las N partículas. En el caso de medios continuos, rígidos o no, constituidos por infinitas partículas, es prácticamente imposible. Por lo tanto es necesario obtener ecuaciones y condiciones de tipo global que caractericen el equilibrio de un sistema en su conjunto. Además, las ecuaciones (13.22) tienen el inconveniente de que intervienen tanto las fuerzas activas como las reacciones, a menudo desconocidas a priori.

El estudio del equilibrio se puede hacer particularizando algunos de los principios generales de la dinámica de sistemas estudiados en el capítulo 6.

En primer lugar, al sumar (13.22) para todas las partículas del sistema, las fuerzas interiores se anulan dos a dos (apartado 6.2.1), por lo que se obtiene

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (13.23)$$

tomando momentos de las fuerzas respecto de un punto cualquiera, sumando los mismos obtendremos otra ecuación análoga:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (13.24)$$

Al igual que en el apartado 6.2.2 hemos considerado que las fuerzas internas son centrales, por lo que sus momentos se anulan dos a dos.

Las ecuaciones (13.23) y (13.24), denominadas *ecuaciones cardinales de la estática*, constituyen un conjunto *necesario* de condiciones que han de cumplirse para que todo sistema esté en equilibrio. En el caso general de un sistema tridimensional serán 6 ecuaciones, mientras que para un sistema plano se tratará de 3 ecuaciones. Estas ecuaciones equivalen a establecer que el sistema de fuerzas, como sistema de vectores deslizantes, sea un sistema nulo (resultante y momento en un punto nulos). Por otra parte, estas ecuaciones pueden considerarse como un caso particular de las ecuaciones cardinales de la dinámica (8.7) ya estudiadas anteriormente.

Como se ha dicho, las ecuaciones cardinales constituyen condiciones necesarias pero *no siempre suficientes* para el equilibrio de un sistema. Dicho de otra manera, el que en un sistema actúe un conjunto de fuerzas de resultante y momento nulos no es garantía de que el sistema esté en equilibrio.

Como ejemplos ilustrativos de esta afirmación basta considerar sistemas en los que pueda haber movimiento relativo entre sus partes, como se muestra en la figura 13.5.

Un método general para establecer el equilibrio es subdividir el sistema global en subsistemas, de forma que al aplicar las ecuaciones (13.23) y (13.24) a cada subsistema resulten condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio del mismo. Adelantaremos que para el caso de los sólidos rígidos estas ecuaciones sí son suficientes para garantizar el equilibrio, lo que se demostrará en el apartado 13.6; por tanto buscaremos una subdivisión en subsistemas rígidos, sin movimiento relativo interno. Lógicamente, al partir un sistema en varios subsistemas las fuerzas ejercidas entre unos y otros, que antes eran internas y no aparecían en las ecuaciones, pasan a ser externas y aumentan por tanto el número de incógnitas. Sin embargo también

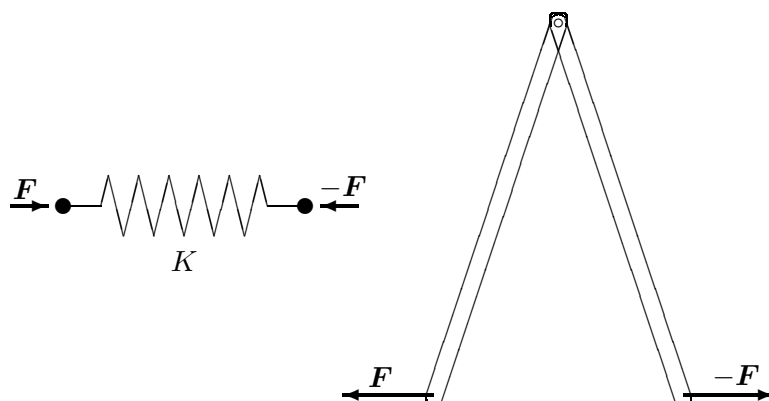


Figura 13.5: *Dos sistemas en los que las fuerzas actuantes tienen resultante y momento nulos, y sin embargo no están en equilibrio.*

aumenta el número de ecuaciones (6 por cada subsistema nuevo), de forma que se obtiene finalmente igual número de ecuaciones que de incógnitas.

13.5.2. Principio de los trabajos virtuales

Este principio fue enunciado en el apartado 6.4.1 como un principio básico de la mecánica, equivalente a las leyes o principios de Newton-Euler. Sus características esenciales que nos serán de utilidad son dos: por una parte, establece una *condición global* para el equilibrio de un sistema; por otra, *permite eliminar todas las fuerzas de reacción correspondientes a enlaces lisos*, reacciones que por lo general son desconocidas a priori.

Recordemos aquí simplemente el enunciado expuesto en 6.4.1. Se llaman desplazamientos virtuales $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ a cualquier conjunto de desplazamientos infinitésimos (tan pequeños como se desee) tomados en un instante dado. En general, no es necesario que los desplazamientos virtuales respeten los vínculos; sin embargo nos interesa restringir éstos a los denominados desplazamientos virtuales compatibles, que sí respetan los vínculos lisos.

Se considera un sistema sometido a fuerzas activas $\{\mathbf{f}_i\}$ y reacciones de enlaces lisos $\{\mathbf{R}_i\}$. El trabajo virtual desarrollado por estas reacciones es nulo para $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ compatibles. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los

enlaces:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles}$$

En el caso en que existan enlaces no lisos, el principio se aplica igualmente pero considerando las fuerzas de rozamiento (que sí realizan trabajo virtual) como fuerzas activas. lo mismo habremos de hacer si existe alguna reacción de un enlace, liso o no, cuyo valor deseemos calcular. Esto último será necesario realizarlo en cualquier caso si los enlaces son unilaterales, con objeto de comprobar a posteriori el signo de la reacción obtenida, para ver si es compatible con la inecuación del enlace.

Como ejemplo de aplicación, consideremos el sistema del muelle de la figura 13.5. Llamaremos x a la elongación del resorte medida desde la posición natural del mismo, y sea su constante K . Tomaremos el desplazamiento virtual δx , obteniendo el trabajo virtual como

$$\delta W = F\delta x - Kx \delta x = 0$$

donde Kx es la fuerza interna debida al resorte, que actúa en sentido contrario a x . Al ser δx arbitrario, se llega inmediatamente a la condición de equilibrio

$$F = Kx$$

Como segundo ejemplo consideremos la aplicación del principio para calcular el valor de una reacción de apoyo. Sea la viga biapoyada de la figura 13.6, de longitud total l , en la que se desea calcular el valor de la reacción vertical en A , R_A .

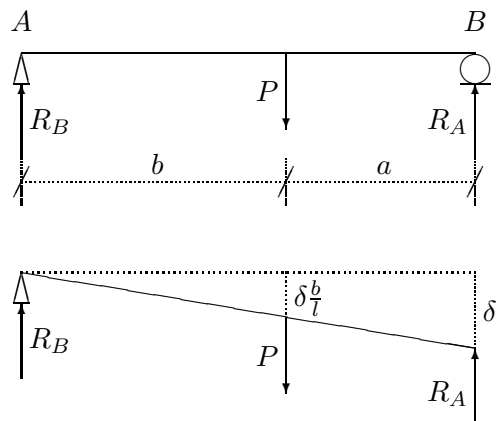


Figura 13.6: Para calcular la reacción en A “liberamos” la coacción correspondiente para calcular el trabajo virtual considerando R_A como fuerza activa

Para ello “liberamos” el apoyo en cuestión y lo sustituimos por una fuerza incógnita R_A . Los desplazamientos virtuales compatibles son los debidos al

giro respecto del apoyo B , que viene caracterizado por el descenso δ en A . Expresando la nulidad del trabajo virtual:

$$\delta W = P \left(\frac{b}{l} \delta \right) - R_A(\delta) = 0$$

al ser δ un valor arbitrario, se elimina para obtener

$$R_A = P \frac{b}{l}$$

Análogamente obtendríamos la reacción en el otro apoyo, $R_B = P \frac{a}{l}$.

13.6. Equilibrio del sólido rígido

13.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales

Es posible obtener las condiciones generales de equilibrio del sólido rígido en un caso general aplicando el Principio de los trabajos virtuales. Tomaremos para ello desplazamientos virtuales compatibles con la condición de indeformabilidad del sólido. Éstos han de cumplir una relación similar a la (4.10) que define el campo de velocidades del sólido:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_i$$

Las magnitudes \mathbf{v}_i pueden ser consideradas como “velocidades virtuales” compatibles. Análogamente, los desplazamientos virtuales compatibles son:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i$$

para valores arbitrarios pequeños de $\delta \mathbf{r}_O$ y $\delta \boldsymbol{\varphi}$.

Expresamos ahora el trabajo virtual:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_O + \sum_i (\delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{F}_i$$

denominando

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

$$\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_O + \delta \varphi \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_O + \mathbf{M}_O \cdot \delta \varphi\end{aligned}$$

Puesto que $\delta \mathbf{r}_O$ y $\delta \varphi$ pueden tomar valores arbitrarios, se deduce inmediatamente que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio son $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, que coinciden precisamente con las ecuaciones cardinales de la estática, (13.23) y (13.24). Al contrario de la observación realizada entonces para un sistema general, en este caso particular (sólido rígido) hemos concluido, gracias al principio de los trabajos virtuales, que las ecuaciones no son sólo necesarias sino también suficientes. Resumiendo, podemos afirmar:

En un sólido rígido la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que el Sistema de Vectores Deslizantes formado por las fuerzas externas sobre el sólido sea un sistema nulo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Podríamos haber alcanzado esta misma conclusión mediante la particularización de las ecuaciones de la dinámica del sólido, (9.1) y (9.2) ó (9.3), para las condiciones de la estática. En efecto, en el equilibrio es $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$, y $\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_O = \mathbf{0}$ (constantes), por lo que se deducen de las citadas ecuaciones $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ como condiciones necesarias y suficientes.

Del resultado anterior se pueden deducir diversos corolarios de interés práctico:

COROLARIO 1.- Si sobre un sólido actúa un sistema de fuerzas, éste puede ser sustituido por otro sistema de vectores deslizantes equivalente (es decir, con igual resultante y momento en cualquier punto, lo que se denomina también *equipolente*), sin alterar las condiciones de equilibrio.

En efecto, la diferencia entre los dos sistemas sería un sistema nulo, que como hemos visto no altera el equilibrio.

COROLARIO 2.- Si sobre un sólido actúan dos fuerzas, estará en equilibrio si y sólo si ambas siguen la misma recta de acción, con el mismo módulo y sentidos opuestos.

En efecto, es la única forma de que las dos fuerzas constituyan un sistema nulo.

COROLARIO 3.- Si sobre un sólido actúan tres fuerzas, para que haya equilibrio éstas deben ser coplanarias y cortarse en un mismo punto.

La justificación es evidente, ya que de otra forma es imposible que el sistema resultante sea nulo.

En el caso en que el sólido tenga el movimiento restringido por enlaces o ligaduras, vale la pena distinguir varios casos:

Sólido libre: Los valores de los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_O$ y $\delta \varphi$ son independientes; por tanto para el equilibrio han de ser nulas tanto la resultante como el momento de las fuerzas aplicadas

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Sólido con un punto fijo: En este caso hay un punto O fijo por lo cual podemos tomar $\delta \mathbf{r}_O = \mathbf{0}$; la nulidad del trabajo virtual no impone por tanto restricción alguna sobre \mathbf{F} , siendo la condición de equilibrio

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Sólido con eje fijo: sea el eje fijo (O, \mathbf{e}) ; los desplazamientos compatibles son por tanto $\delta \mathbf{r}_O \parallel \mathbf{e}$, $\delta \varphi \parallel \mathbf{e}$, por lo que se obtienen las condiciones de equilibrio

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{e} = 0$$

es decir, las proyecciones de \mathbf{F} y \mathbf{M} sobre \mathbf{e} deben anularse para el equilibrio.

13.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos

En la estática el objetivo suele ser determinar en primer lugar las configuraciones o cargas exteriores para el equilibrio, para a continuación calcular las reacciones en los enlaces o apoyos.

Los casos particulares comentados en el apartado anterior corresponden a sustentaciones que dejan al sistema con algún grado de libertad. Al permitir el movimiento, se necesita para el equilibrio que una o más componentes de las fuerzas o momentos sea nulo.

Si se aumenta el número de coacciones del sólido, se llega a un punto en que no se permite ningún grado de libertad de movimiento: el sistema

estará entonces en equilibrio para cualquier conjunto de cargas exteriores (siempre que no se supere la resistencia de rotura de los enlaces). Es el caso, por ejemplo, de un sólido con un eje fijo por un cojinete cilíndrico, restringiendo además el movimiento de traslación en la dirección del eje y el de rotación alrededor del mismo. Las reacciones tendrían 6 componentes, que se determinarían mediante las 6 ecuaciones cardinales de la estática (13.23) y (13.24).

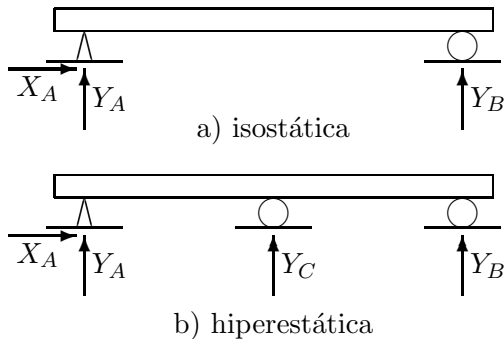


Figura 13.7: *Sustentaciones isostática e hiperestática de una viga: en el segundo caso las ecuaciones de la estática no son suficientes para calcular las reacciones en los apoyos; se dice que existen reacciones “redundantes”.*

Para fijar ideas consideremos un sistema plano, formado por una viga recta biapoyada, en el que uno de los apoyos es una articulación y el otro un apoyo simple que permite el desplazamiento horizontal (figura 13.7_a)

En este caso las tres ecuaciones de la estática ($M = 0$; $F_x = 0$; $F_y = 0$) permiten calcular las tres reacciones incógnitas, X_A , Y_A e Y_B , para cualquier conjunto de cargas exteriores. Decimos que la sustentación es *isostática*, ya que el número de incógnitas a determinar, provenientes de las reacciones de enlace, es igual al número de ecuaciones de la estática.

Imaginemos ahora que a la misma viga se le coloca otro apoyo C intermedio, que restrinja tan sólo el movimiento vertical en ese punto. Para un conjunto dado de cargas exteriores tenemos ahora 4 reacciones incógnitas (X_A , Y_A , Y_B , Y_C) y tan sólo 3 ecuaciones de la estática. Se dice que el sistema es *estáticamente indeterminado o hiperestático*, debido a que posee apoyos redundantes, que “sobran” para garantizar el equilibrio.

Desde el punto de vista de la estática de sistemas rígidos no existe ningún truco ni procedimiento que permita resolver este problema. Está correctamente planteado, ocurriendo que *no tiene solución mediante el sólo empleo de las ecuaciones globales de equilibrio*. Es pues necesario obtener ecuaciones adicionales que proporcionen alguna relación más entre las incógnitas. Estas ecuaciones se obtienen a través de considerar la deformabilidad de la estructura (aplicando las técnicas que se estudian en la resistencia de materiales o en el cálculo de estructuras). A partir del estudio de la defor-

mabilidad de los sólidos y las estructuras, así como de las ecuaciones de comportamiento de las mismas que ligan las deformaciones internas con las tensiones, se obtienen las ecuaciones adicionales necesarias. El estudio de estos aspectos se halla fuera del alcance de este curso.

13.7. Reacciones en los enlaces

Los enlaces, ligaduras o apoyos son dispositivos que restringen de alguna manera los movimientos del sistema.

Ya se han discutido las características generales y la clasificación de los mismos en el apartado 6.1 y en este mismo capítulo, en el apartado 13.1. Vimos entonces que los enlaces de tipo bilateral se pueden definir mediante ecuaciones bien del tipo (13.2) si son holónomos, o bien del tipo (13.3) si son anholónomos.

Las restricciones al movimiento están asociadas a *fuerzas de reacción* o *reacciones* de los enlaces, que son las acciones necesarias para impedir o coaccionar los movimientos que los enlaces restringen. Estas fuerzas se denominan de reacción porque sólo se producen como reacción o respuesta a un intento de realizar el movimiento que el enlace prohíbe. Su valor por tanto no es conocido a priori, sino sólo como consecuencia de la solución de las ecuaciones del equilibrio (o de la dinámica en su caso). De ahí que nos interese en general un procedimiento de solución que, en primera instancia al menos, elimine de las ecuaciones las reacciones desconocidas en los enlaces. Ésta es una de las ventajas principales del principio de los trabajos virtuales, expuesto en el apartado 13.5.2.

El cálculo de las reacciones en los enlaces se realiza entonces en una segunda instancia, una vez que se conocen las posibles configuraciones de equilibrio. La obtención de las reacciones puede ser necesaria por diversos motivos: bien para realizar una comprobación de la resistencia de los propios dispositivos de apoyo o ligadura, bien para conocer los esfuerzos que se transmiten a otros sistemas colindantes, o bien para realizar un cálculo más detallado de los mecanismos de transmisión de los esfuerzos, como por ejemplo las roscas de los tornillos, o los cojinetes de los ejes.

En otros casos puede no ser conveniente o práctico plantear el problema mediante trabajos virtuales. Este es el caso, por ejemplo, de los enlaces rugosos que sí realizan trabajo virtual. Es preciso conocer la naturaleza de los esfuerzos que realizan para plantear las ecuaciones de la estática.

En lo que sigue hablaremos brevemente de ambos tipos de enlaces: en primer lugar las ligaduras lisas, y a continuación las que transmiten fuerzas

de contacto de rozamiento.

13.7.1. Enlaces lisos

Apoyo simple.- La reacción corresponde a la que se produce entre dos superficies tangentes que se tocan en un punto, permitiendo el deslizamiento relativo entre ambas.

Sabemos por lo estudiado en cinemática (apartado 4.5.3) que las velocidades de los puntos en contacto correspondientes a cada uno de los dos sólidos han de estar contenidas en el plano tangente común. Estas velocidades, correspondientes a partículas de cada sólido, no tienen porqué ser iguales; en el caso en que lo sean estaremos en condiciones de *rodadura*, y en caso contrario existirá *deslizamiento*.

En cualquier caso, si el enlace es liso, para que la reacción no realice trabajo ésta deberá ser normal a las superficies en contacto.

En general, este tipo de apoyo es compatible con una rotación relativa entre ambos sólidos, rotación que puede descomponerse tal como se discutió en el apartado 4.5.3 en *rodadura* y *pivotamiento*.

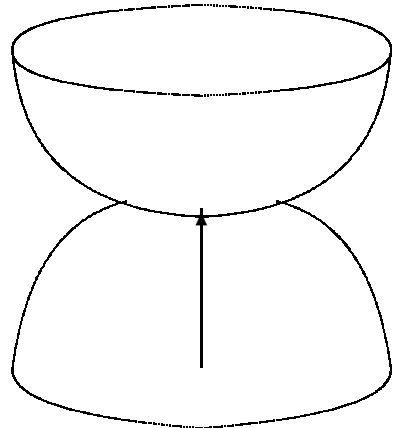
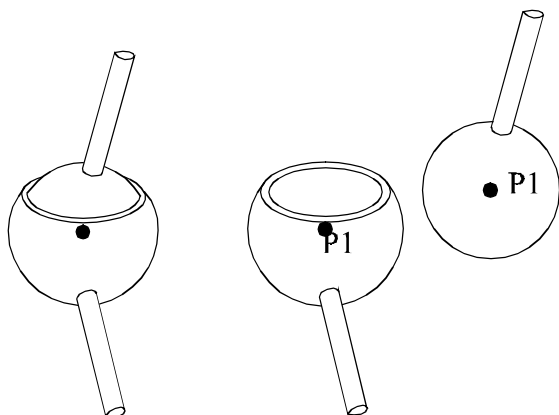


Figura 13.8: *Apoyo simple entre superficies lisas.*

Rótula esférica.- Esta unión entre dos sólidos puede considerarse, de manera idealizada, como una protuberancia esférica de uno de los sólidos que se inserta en una oquedad de la misma forma en el otro. Si ambas superficies son lisas, las fuerzas de contacto entre ambas serán radiales, siendo la resultante por tanto un vector que pasará por el centro de la esfera, en dirección arbitraria.

En definitiva, este enlace impone tres coacciones (las coordenadas

Figura 13.9: Rótula esférica materializada como una esfera sólida incluida en una oquedad igualmente esférica.



(x, y, z) del centro de la esfera) y la reacción tiene consiguientemente tres incógnitas, las tres componentes del vector (R_x, R_y, R_z) .

Articulación plana.- Constituye el caso correspondiente a la rótula esférica para el movimiento plano. En él las coacciones son dos (coordenadas (x, y) del centro de la articulación), de igual manera que las componentes de la reacción (R_x, R_y) , que pasará por el centro de la articulación y tendrá una orientación arbitraria en el plano.

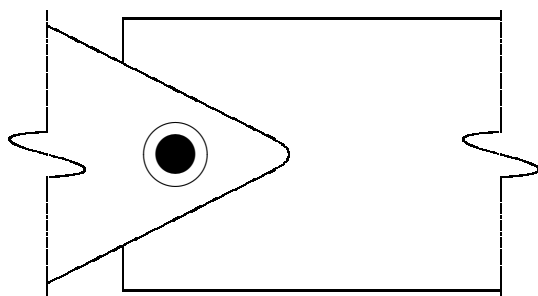


Figura 13.10: Articulación plana

Arbol circular en cojinete cilíndrico.- Se trata en este caso de una superficie cilíndrica circular que penetra en una oquedad igualmente cilíndrica. Al ser las fuerzas normales al cilindro, reduciendo éstas a un punto O de su eje, se obtiene una reacción de componentes (R_x, R_y) (siendo z la dirección del eje) y un momento de componentes (M_x, M_y) . Se considera que el cojinete cilíndrico permite el desplazamiento axial del eje (en dirección z), así como la rotación del mismo, por lo que las únicas componentes nulas de la reacción son R_z y M_z .

Figura 13.11: *Enlace materializado mediante un árbol circular en un cojinete cilíndrico, pudiendo deslizar según la dirección del eje.*

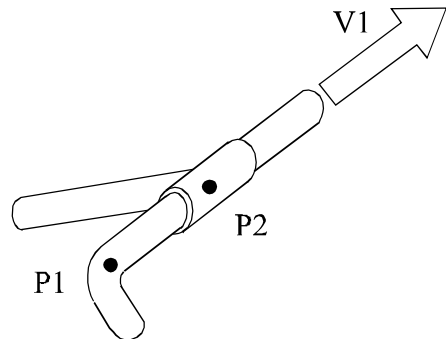
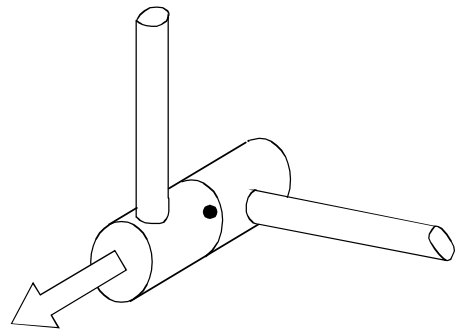


Figura 13.12: *Enlace formado por una junta de revolución que no permite deslizamiento en dirección axial.*



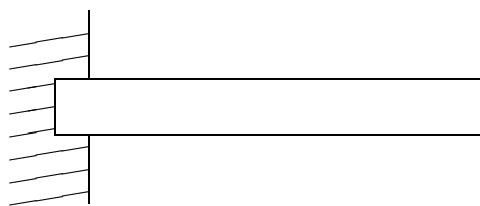
En algunos casos los cojinetes incorporan una coacción al movimiento axial, producida por un saliente o tornillo que se aloje en una garganta del eje. En este caso la reacción tendría también la componente R_z , siendo entonces equivalente a la articulación plana mencionada arriba. El movimiento permitido se reduce a la rotación alrededor del eje Oz fijo.

Otra variante es el caso en que el alojamiento circular sea muy estrecho en dirección axial, por lo que permitiría en la práctica los giros según las direcciones no axiales x e y . Por lo tanto, las componentes de la reacción serían únicamente R_x y R_y , normales al eje, sin momentos de ningún tipo. Este enlace equivaldría a una rótula esférica, en la que se permite además el deslizamiento según la dirección axial del eje cilíndrico.

Empotramiento.- Es el enlace más rígido, consistiendo en una soldadura o unión perfecta entre los sólidos. No admite movimientos relativos de traslación ni de rotación. entre los dos sólidos, por lo que las reacciones incógnitas son seis: las fuerzas (R_x, R_y, R_z) y los momentos (M_x, M_y, M_z)

en el punto de empotramiento.

Figura 13.13: *Empotramiento: no admite desplazamiento ni giros relativos.*

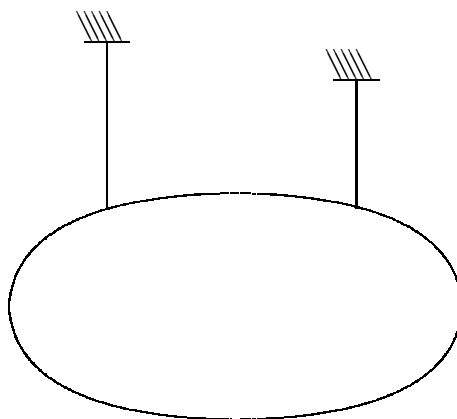


En el caso del movimiento plano lógicamente las reacciones quedan reducidas a tres, (R_x, R_y) para las fuerzas y M_z para el momento.

Las cuerdas o hilos.- Los hilos son capaces de transmitir esfuerzos tan sólo en su propia dirección y en el sentido de tracción, es decir, en el que tiende a estirar al hilo³.

Por tanto, la reacción tendrá una única componente (T), denominada *tensión del hilo*. Al tratarse de un enlace de tipo unilateral, será preciso comprobar a posteriori el signo de la misma, comprobando que es de tracción ($T > 0$). En caso que resultase de compresión ($T < 0$) volveríamos a resolver el problema “eliminando” el hilo, ya que obviamente no podría actuar en el sentido de compresión.

Figura 13.14: *Enlace proveniente de un hilo.*



El método habitual para calcular a posteriori la tensión del hilo es “cortar” el hilo, sustituyéndolo por la acción de la tensión T en cada uno de los dos sólidos que une, en la dirección del mismo.

³Consideramos aquí tan sólo hilos sin peso ni cargas distribuidas que siempre adoptan bajo tensión una configuración recta, quedando los hilos curvos sometidos a cargas distribuidas para el capítulo 14.

En el contexto de la mecánica de sólidos rígidos y de sistemas discretos los hilos que se manejan son por lo general *inextensibles*. Los hilos reales tienen siempre una cierta elasticidad, pudiendo estirarse según la tensión aplicada, aunque en la práctica generalmente sea muy poco. En esta asignatura consideraremos que este estiramiento es despreciable, salvo que se diga expresamente lo contrario.

13.7.2. Enlaces con resistencias pasivas; rozamiento

Rozamiento entre superficies en contacto

En los enlaces reales, materializados mediante superficies sólidas en contacto, no se da nunca de manera exacta el comportamiento ideal descrito para los enlaces lisos. Los contactos reales no se producen entre superficies geométricas lisas, sino que existen rugosidades e imperfecciones en las mismas; por otra parte, al ser comprimidos, los sólidos se deforman, con lo que el contacto no es puntual. La lubricación de los contactos facilita el deslizamiento entre las superficies, al hacer que el contacto se realice no de manera directa sino a través de una película de lubricante interpuesta.

Estos fenómenos contribuyen a hacer que las acciones de contacto reales sean considerablemente más complejas que lo descrito en el apartado anterior, y que además en muchos casos sea necesario considerar reacciones de enlace en forma de resistencias pasivas que desarrollan un trabajo. La naturaleza de estas resistencias es tal que se oponen al deslizamiento relativo de los puntos en contacto, de forma que el trabajo realizado por ellas es siempre negativo, detrayéndose de la energía mecánica del sistema. De aquí el *carácter disipativo* de las mismas, que hace que la energía mecánica disminuya siempre, siguiendo la segunda ley de la termodinámica.

Para la resistencia al deslizamiento de dos superficies en contacto, el modelo más usual es el denominado *rozamiento de Coulomb*. Este modelo postula que si la fuerza normal que comprime a ambas superficies en contacto es N , el contacto es capaz de desarrollar una fuerza de rozamiento en dirección tangencial cuyo valor está limitado por la desigualdad

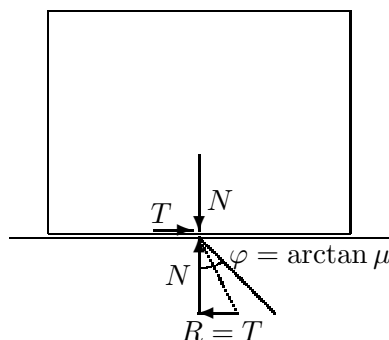
$$R \leq \mu N$$

donde μ es el denominado *coeficiente de rozamiento* de Coulomb.

Debe precisarse que esta inecuación establece el valor máximo del rozamiento que puede movilizarse en el contacto. No debe cometerse el error de suponer que la fuerza de rozamiento toma siempre el valor μN ; éste corresponde únicamente al valor máximo que puede tomar.

En la práctica, el rozamiento se moviliza de forma gradual. Supongamos un contacto entre dos superficies en equilibrio bajo una fuerza normal a las mismas de valor N . Si la acción se va inclinando ligeramente, se moviliza simultáneamente el rozamiento necesario para equilibrar la componente tangencial de la acción ($R < \mu N$). Llega un momento en que se alcanza el valor máximo del rozamiento ($R = \mu N$) y el punto de contacto comienza a deslizar. Por tanto, el valor máximo μN sólo se alcanza cuando se está produciendo el deslizamiento o cuando el contacto está en el límite, a punto de deslizar.

Figura 13.15: En el modelo de rozamiento de Coulomb la reacción tangencial (T) que se moviliza es menor o igual como máximo a μ por la reacción normal (N), lo que permite definir el ángulo de rozamiento $\varphi = \arctan \mu$.



El rozamiento de Coulomb tiene una interpretación geométrica sencilla, ya que el ángulo entre las componentes normal y tangencial de la reacción viene dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{N} \leq \mu$$

El deslizamiento se producirá por tanto si este ángulo supera el valor máximo definido por

$$\alpha \leq \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu,$$

es decir, la fuerza de reacción está contenida en un *cono de rozamiento* de semiángulo φ y vértice en el punto de contacto.

Por lo tanto la condición de equilibrio, en relación con las fuerzas aplicadas en uno de los sólidos, es que éstas se reduzcan a una resultante aplicada en el punto de contacto, cuyo ángulo con la normal sea menor o igual que el ángulo de rozamiento φ , es decir, que esté incluida dentro del cono de rozamiento.

La realidad es algo más compleja que lo expuesto arriba, ya que se comprueba generalmente que al comenzar el deslizamiento el rozamiento tangencial se reduce. Esto da lugar a dos coeficientes de rozamiento distintos: el coeficiente estático antes del deslizamiento (μ), válido hasta la situación

límite, y el coeficiente dinámico ($\mu' < \mu$), una vez comenzado el deslizamiento. Asimismo, el coeficiente de rozamiento depende en la realidad de diversos factores más, como la lubricación, el estado de las superficies en contacto, e incluso de la presión entre ambas.

El rozamiento, como mecanismo elemental, es responsable de diversas manifestaciones de resistencias pasivas en mecanismos de enlace, como se describe a continuación.

Resistencia al giro en el cojinete de una articulación.- Sea una articulación formada por un cojinete que aloja a un eje cilíndrico de radio R (figura 13.16). Sobre el eje actúa una carga P , con una pequeña excentricidad de forma que tiende a hacer girar el eje en el sentido contrario a las agujas del reloj.

El rozamiento en el contacto eje-cojinete produce una fuerza de valor $T \leq \mu P$, y en el límite de deslizamiento $T = \mu P$. Para que el eje comience a girar alrededor de sí mismo, será necesario un momento que contrarreste el momento generado por esta fuerza de rozamiento, es decir $M = \mu RP$. Denominando

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \mu R,$$

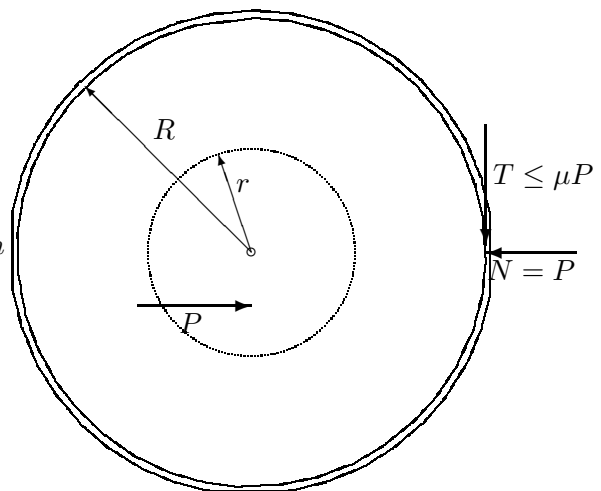


Figura 13.16: Resistencia al giro en cojinetes

se puede interpretar esta resistencia como el efecto de un momento resistente al giro, de valor

$$\boxed{M_r \leq rP} \Leftrightarrow \begin{cases} M_r < rP & \text{si no existe giro en el cojinete,} \\ M_r = rP & \text{si existe giro.} \end{cases}$$

Se puede interpretar que el valor del parámetro r , con dimensiones de longitud, define un *círculo de rozamiento*. Para que haya equilibrio la carga exterior \mathbf{P} , como vector deslizante resultante de las acciones, debe pasar por dentro del círculo de rozamiento; si su eje de acción no intersecta el círculo, se producirá giro en el cojinete.

El mecanismo de resistencia al giro en una rótula esférica es similar a éste, definiéndose un parámetro r que define una esfera de rozamiento de igual manera.

Resistencia al pivotamiento.- Esta resistencia se origina por el hecho de que el contacto entre dos superficies no es exactamente puntual, sino que por la deformación de las superficies, se produce contacto en una zona de extensión finita. El giro de pivotamiento desencadena un rozamiento, que produce un momento resistente alrededor del eje de pivotamiento. Este momento resistente se caracteriza por un parámetro ϵ con dimensiones de longitud, de forma que

$$\boxed{M_p \leq N\epsilon} \Leftrightarrow \begin{cases} M_p < N\epsilon & \text{si no existe pivotamiento,} \\ M_p = N\epsilon & \text{si existe pivotamiento.} \end{cases}$$

Resistencia a la rodadura.- Se trata de otro mecanismo de resistencia pasiva muy común, aunque en este caso no está producido por el rozamiento entre superficies. Distinguiremos dos casos, según se trate de una rueda motriz o remolcada.

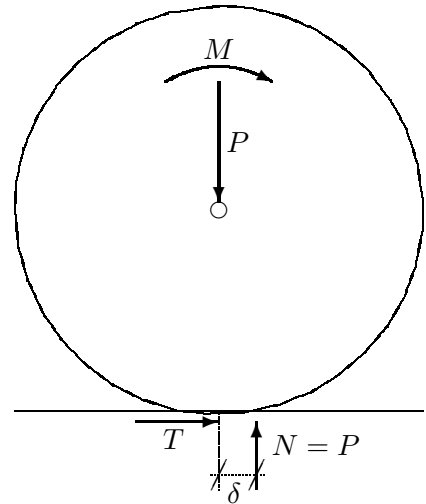
Rueda motriz.- Consideremos una rueda rodando sobre una superficie plana, sobre la que actúa una carga vertical P (figura 14.14). Se observa que la reacción N , considerada como vector deslizante, no está situada bajo el eje de la rueda, sino ligeramente adelantada. Esto se debe a que esta reacción es en realidad la resultante de las acciones de contacto en un área finita no puntual, que tiende a deformarse hacia delante por efecto de la rodadura.

Se puede definir por tanto un *coeficiente de resistencia a la rodadura* δ , con dimensiones de longitud, de forma que el momento resistente vale

$$\boxed{M_r \leq N\delta} \Leftrightarrow \begin{cases} M_r < N\delta & \text{si no existe rodadura,} \\ M_r = N\delta & \text{si existe rodadura.} \end{cases}$$

Conviene recalcar que físicamente este efecto no está relacionado con el rozamiento sino con la deformación local del área de contacto. De hecho

Figura 13.17: Resistencia a la rodadura de una rueda Motriz, sobre la que actúa un momento M y una carga P .



en la rodadura se produce una fuerza de rozamiento (T en la figura 13.17) que, aunque pudiera resultar chocante a primera vista, lleva el sentido del movimiento de avance de la rueda. Esto es debido a que el movimiento relativo que tiende a producir el par M sobre el punto de la rueda en contacto tiene sentido opuesto al avance (es decir, hacia atrás). Por tanto el rozamiento “empuja” a la rueda en sentido opuesto, hacia delante. El valor de esta fuerza de rozamiento es

$$\boxed{T \leq \mu P} \Leftrightarrow \begin{cases} T < \mu P & \text{si no existe deslizamiento,} \\ T = \mu P & \text{si existe deslizamiento.} \end{cases}$$

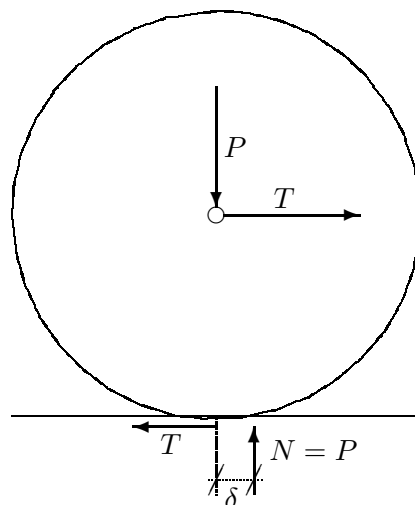
Rueda remolcada.- La situación cambia si se trata de una *rueda remolcada*, sobre la que actúa una carga P vertical y una tracción T en sentido del avance (figura 13.18).

En este caso la resistencia a la rodadura se produce de manera similar, manifestándose como un avance del eje de la resultante de las reacciones normales N , cuyo máximo valor es δ . El momento resistente a la rodadura valdrá

$$M_r \leq N\delta$$

Sin embargo, la reacción tangencial llevará en este caso el sentido opuesto al avance. Esto se puede interpretar debido a que la tracción sobre el eje de la rueda tiende a producir un deslizamiento del punto de contacto en sentido del avance.

Figura 13.18: *Resistencia a la rodadura de una rueda remolcada, sobre la que actúa una tracción T y una carga P .*



Por último, observemos que en caso de duda respecto al sentido de la reacción tangencial en los casos de rodadura, conviene establecer las ecuaciones cardinales (13.23) y (13.24) de equilibrio (o de la dinámica en su caso), cuya solución proporcionará el valor adecuado para la reacción en cada caso (en sentido algebraico, es decir con signo $+$ ó $-$). A menudo es preferible esto ya que las apreciaciones intuitivas respecto a la “tendencia al deslizamiento” pueden prestarse a confusiones.

13.8. Sistemas de barras articuladas

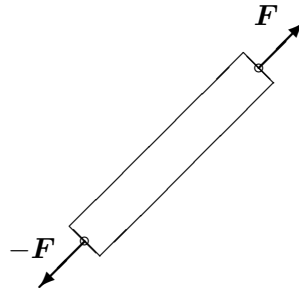
13.8.1. Clasificación

Un tipo de sistemas de particular interés en diversas ramas de la ingeniería, y en concreto en la ingeniería estructural, son los formados por barras articuladas, con cargas concentradas aplicadas en las articulaciones.

Un conjunto de barras unidas mediante articulaciones puede dar lugar a distintos tipos de sistemas, según el número de movimientos permitidos o de coacciones a los mismos.

En primer lugar, cada una de las barras debe estar en equilibrio. Al aplicar las ecuaciones cardinales (13.23) y (13.24) se concluye inmediatamente que los esfuerzos en los extremos de cada barra deben ser iguales y de signo contrario, dirigidos según la propia barra. Este esfuerzo se denomina *tensión* en la barra. En un sistema de barras existirá por tanto una incógnita por barra (su tensión) más 6 reacciones incógnitas provenientes de los apoyos (supuesta una sustentación isostática).

Figura 13.19: *Esfuerzos en una barra en equilibrio*



El número de ecuaciones de que se dispone para resolver estas incógnitas son las del equilibrio en cada articulación: es decir, 3 ecuaciones provenientes de anular la resultante de las fuerzas sobre la misma. No cabe hablar de momentos sobre la articulación ya que éstas se idealizan como puntos y no pueden transmitir momentos a las barras. Por lo tanto, en un caso general, suponiendo que el número de barras es b y el número de nudos n , se tienen $3n$ ecuaciones para $(6 + b)$ incógnitas. En el caso particular de sistemas planos, estas se reducirán a $2n$ ecuaciones del equilibrio en cada nudo, para $(3 + b)$ incógnitas.

Las posibles combinaciones, algunas de las cuales se ilustran en la figura 13.20 para un caso plano, son las siguientes:

Tipo de sistema	Sistema Plano (2D)	Sistema Espacial (3D)
Mecanismo (existen g.d.l. internos)	$2n > 3 + b$	$3n > 6 + b$
Estructura isostática (sin g.d.l. internos)	$2n = 3 + b$	$3n = 6 + b$
Estructura hiperestática (barras redundantes)	$2n < 3 + b$	$3n < 6 + b$

En el caso de los *mecanismos*, las coacciones de las barras rígidas y de las ecuaciones globales de equilibrio ($3 + b$ ó $6 + b$ según sea 2D ó 3D) no son suficientes para restringir el giro en todos los nudos, permitiendo entonces movimientos o grados de libertad internos. Los mecanismos se emplean en los casos en que se quiera transmitir movimientos de forma controlada y eficaz, como en las máquinas de diverso tipo. un ejemplo muy común es el mecanismo biela-cigüeñal de los motores de los automóviles. Sin embargo, en las estructuras con fines portantes de ingeniería civil, por lo general se busca que no se muevan internamente, por lo que procuraremos una coacción interna mayor.

Las *estructuras isostáticas* poseen el número adecuado de barras para que, junto con las ecuaciones del equilibrio global, coaccionen el movimiento de giro en todas las articulaciones ($2n = 3 + b$ ó $3n = 6 + b$ según que sea $2D$ ó $3D$). Se dice que estamos ante una *estructura*, porque ésta no posee grados de libertad internos. Además esta estructura es *isostática*, puesto que las ecuaciones de la estática bastan para obtener todas las tensiones en las barras incógnitas. Este tipo de sistemas sí son susceptibles de empleo en ingeniería civil con fines estructurales y resistentes.

Por último, las *estructuras hiperestáticas*, restringen también los giros y movimientos internos en los nudos, pero mediante un número de coacciones mayor que el estrictamente necesario. El número de barras es mayor que en el caso isostático, de forma que se verifica $2n < 3 + b$ ó $3n < 6 + b$ según estemos en $2D$ ó $3D$. Las ecuaciones de la estática no son suficientes para obtener las tensiones en cada barra, habiendo de recurrirse a técnicas propias del cálculo de estructuras hiperestáticas⁴, en las que es preciso tener en cuenta la deformabilidad de cada barra y su relación con la tensión en la misma. Estos sistemas también son adecuados para fines estructurales.

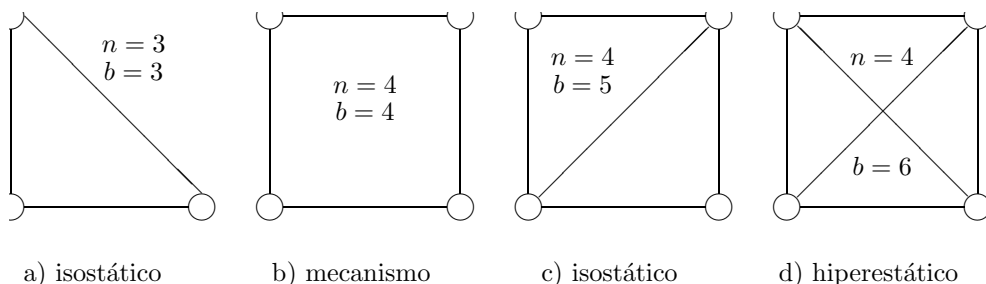


Figura 13.20: *Ejemplos de sistemas isostáticos, hiperestáticos y mecanismos*

Conviene resaltar que la clasificación realizada arriba entre mecanismos, estructuras isostáticas e hiperestáticas, se refiere exclusivamente a los grados de libertad internos o a las coacciones a los mismos. Hemos supuesto en toda la discusión que el número de reacciones provenientes de los apoyos externos del sistema eran 3 para el caso plano y 6 para el espacial, correspondientes a lo que se denominó, en el apartado 13.6.2, *sustentación isostática*. Cabe pensar sin embargo en una estructura internamente isostática, pero con una sustentación hiperestática, o incluso con una sustentación insuficiente que permita desplazamientos globales de la misma como sólido rígido. lo mismo

⁴Estas técnicas se estudian en las disciplinas de *resistencia de materiales* y *cálculo de estructuras*.

cabe decir de las estructuras hiperestáticas, que pueden tener sustentaciones isostáticas, hiperestáticas, o incluso insuficientes.

También es necesario precisar que pueden existir casos en los que no sea válido aplicar las fórmulas dadas arriba para clasificar como isostático o hiperestático el sistema en su conjunto, ya que este puede ser heterogéneo. En efecto, pudiera ocurrir que una parte del mismo tuviese el carácter de estructura (isostática o incluso hiperestática, con un número cualquiera de barras redundantes) mientras que otra parte estuviese insuficientemente coaccionada, constituyendo el conjunto un mecanismo. Por tanto, es necesario realizar un análisis cuidadoso de cada sistema concreto, diferenciando si es preciso las distintas partes, antes de aplicar las fórmulas de la tabla anterior.

Restringiéndonos a los casos de *estructuras isostáticas* sustentadas asimismo de manera isostática, explicaremos a continuación a grandes rasgos dos métodos generales de resolución para las mismas.

13.8.2. Método de los nudos

El método de los nudos se basa en realizar una separación de cada uno de los nudos de la estructura, estableciendo el equilibrio de fuerzas en él a partir de las tensiones de las barras, las posibles cargas aplicadas en el nudo, y las posibles reacciones caso de existir un apoyo en el nudo.

En primer lugar se determinan, mediante las ecuaciones cardinales de la estática (13.23) y (13.24), las reacciones de apoyo de la estructura para las cargas dadas, lo que siempre será posible si la sustentación es isostática como se ha supuesto. A continuación se escoge un nudo en que exista un número de barras (es decir, de incógnitas) suficientemente bajo para que se puedan determinar las tensiones en barras por las ecuaciones de equilibrio en el nudo: un nudo con 3 barras como máximo en $3D$, ó con 2 barras como máximo en $2D$. Al plantear el equilibrio del nudo ($\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$) podremos calcular las tensiones en barras unidas al nudo. Una vez resuelto este nudo se procede a otro nudo conexo con éste, en el cual una de las tensiones ya es conocida (la de la barra que une ambos). Solucionamos este nudo para el resto de las tensiones incógnitas de igual manera. El procedimiento se repite sucesivamente, escogiendo siempre nudos con un número de incógnitas suficientemente bajo, hasta resolver toda la estructura.

El método se ilustra mejor mediante un ejemplo, como el correspondiente a la cercha articulada de la figura 13.21. En este ejemplo, una vez calculadas las reacciones de apoyo (X_B, Y_B, Y_A), se van calculando las tensiones en barras, progresando de nudo en nudo como se ha dicho.

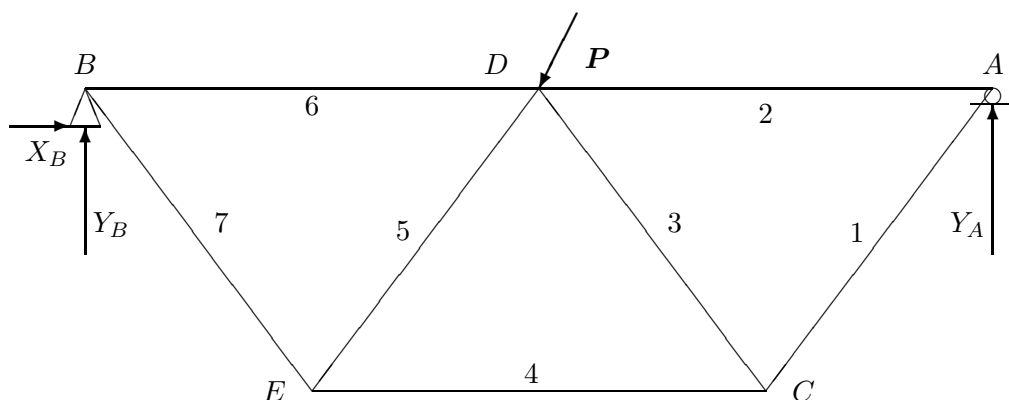


Figura 13.21: Ejemplo de resolución de una estructura plana articulada por el método de los nudos. Se comienza por el nudo A para determinar T_1 y T_2 , luego el C (T_3 y T_4), el D (T_5 y T_6) y por último el E (T_7).

El procedimiento del cálculo se puede aplicar de forma analítica o de forma gráfica, siendo este último procedimiento debido a Cremona.

Conviene aclarar que en una estructura isostática siempre existe un camino isostático de solución que permite ir solucionando nudo a nudo. En el caso en que no exista este camino, se tratará en realidad de una estructura hiperestática.

13.8.3. Método de las secciones

El método de las secciones, que se aplica tan sólo a sistemas planos, se basa en plantear las ecuaciones de equilibrio a una parte de la estructura, en la que el resto se ha seccionado y sustituido por las tensiones en las barras cortadas.

El método comienza, al igual que en el caso anterior, por el cálculo de las reacciones de apoyo isostáticas. A continuación se basa en el principio de que, para una sección ideal (es decir, teórica) de una estructura, el efecto de un lado de la estructura sobre el otro se reduce a las fuerzas (como vectores deslizantes) de los elementos cortados aplicados en los puntos donde se han seccionado. Esto permite considerar el equilibrio de uno sólo de los lados de la estructura, sujeto a las fuerzas (incógnitas) de las barras seccionadas.

Puesto que en el caso plano disponemos de 3 ecuaciones cardinales de equilibrio, buscaremos secciones en las que se corte tan sólo a tres barras cuya tensión sea desconocida. De esta forma será posible mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio calcular la tensión en las tres barras.

Se procede así con sucesivas secciones hasta determinar finalmente todas las tensiones en barras de la estructura.

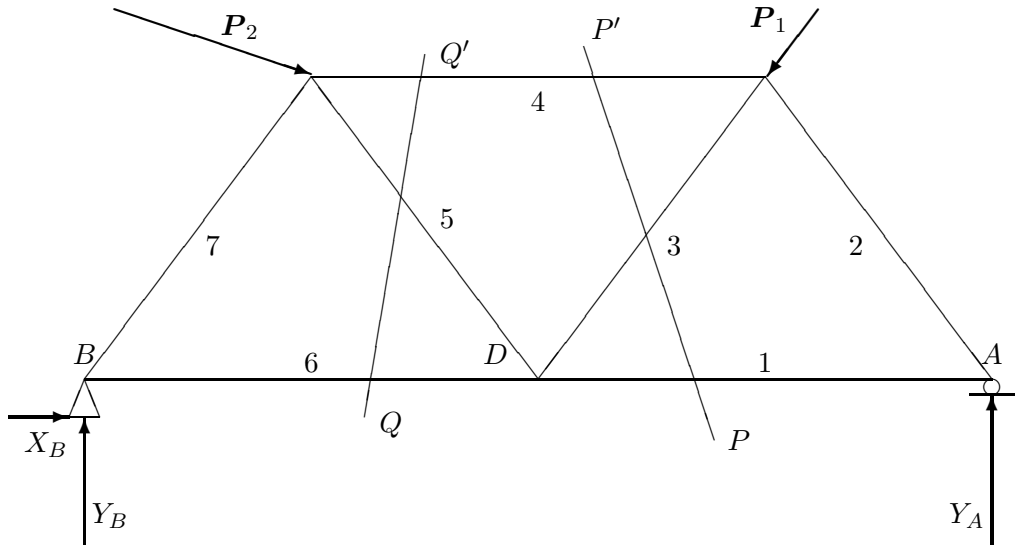


Figura 13.22: Resolución de una cercha articulada por el método de las secciones. Una vez calculadas las reacciones de apoyo, el corte por la sección PP' permite determinar las tensiones T_1 , T_3 y T_4 . La sección QQ' permitirá calcular T_5 y T_6 , y así sucesivamente

El mejor modo de explicar el método es, al igual que antes, mediante un ejemplo, descrito en la figura 13.22.

Al igual que en el caso de los nudos, toda estructura isostática permite dar secciones consecutivas de forma que en cada una surjan tan sólo 3 incógnitas o menos. En caso de que no se pudiera, la estructura sería en realidad hiperestática.

