Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

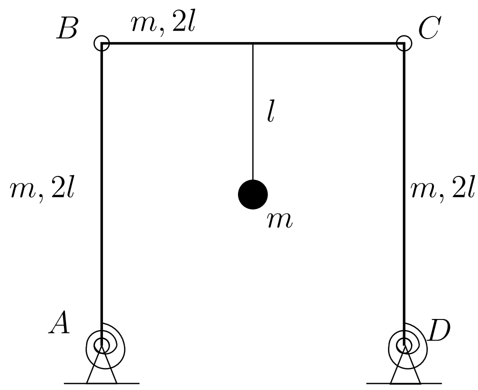
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (11 de septiembre de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 60 min.

El marco $ABCD$ de la figura está constituido por tres barras iguales, articuladas en sus extremos, de masa m y longitud $2l$. En los extremos fijos A y D están dispuestos sendos muelles de torsión que ofrecen un momento resistente proporcional al ángulo girado, siendo k el valor de la constante de proporcionalidad, mientras que los extremos B y C permiten el giro libre. Asimismo del punto medio de la barra BC cuelga un péndulo simple, formado por una varilla sin masa de longitud l y una masa puntual m en el extremo libre.

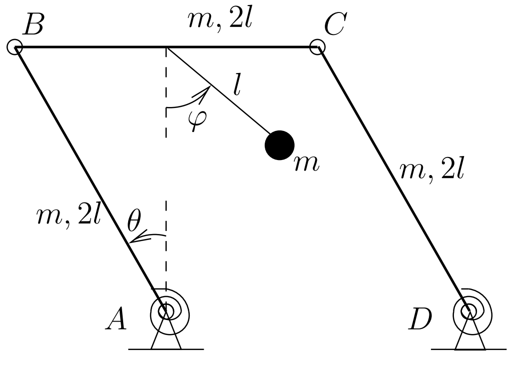


Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización de las ecuaciones para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio de la figura. Calcular el valor mínimo de la constante k para que dicho equilibrio sea estable.
3. Para el caso en que la constante k valga el doble del valor calculado en el apartado anterior, obtener las frecuencias propias de las pequeñas oscilaciones.

---

1. Se consideran las coordenadas generalizadas θ y φ correspondientes a los giros absolutos de la barra AB y del péndulo, respectivamente (ver figura adjunta). La expresión de la energía cinética es:



$$T = \underbrace{2\left(\frac{2}{3}ml^2\dot\theta^2\right)}_{\text{barras } AB \text{ y } CD} + \underbrace{2ml^2\dot\theta^2}_{\text{barra } BC} + \underbrace{\frac{1}{2}\left((l\dot\varphi\cos\varphi - 2l\dot\theta\cos\theta)^2 + (l\dot\varphi\sin\varphi - 2l\dot\theta\sin\theta)^2\right)}_{\text{péndulo}}$$

$$= \frac{16}{3}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 - 2ml^2\dot\theta\dot\varphi\cos(\varphi-\theta) \qquad (1)$$

y la energía potencial:

$$V = 6mgl\cos\theta - mgl\cos\varphi + k\theta^2 \qquad (2)$$

A partir de la función lagrangiana $L = T - V$, sustituyendo (1) y (2) y derivando se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$\frac{32}{3}ml^2\ddot{\theta} - 2ml^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) + 2ml^2\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta) - 6mgl\sin\theta + 2k\theta = 0 \tag{3}$$

$$-2ml^2\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) + ml^2\ddot{\varphi} - 2ml^2\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta) + mgl\sin\varphi = 0 \tag{4}$$

2. Dado que en la posición de equilibrio considerada las coordenadas generalizadas valen cero, para obtener las ecuaciones linealizadas se realizan las siguientes sustituciones en (3) y (4):

$$\sin\theta \approx \theta \qquad \sin\varphi \approx \varphi \qquad \cos\theta \approx 1 \qquad \cos\varphi \approx 1 \tag{5}$$

despreciando los terminos de orden 2 y superior, correspondientes a las coordenadas y velocidades generalizadas, resulta:

$$\frac{32}{3}ml^2\ddot{\theta} - 2ml^2\ddot{\varphi} + (2k - 6mgl)\theta = 0 \tag{6}$$

$$-2ml^2\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \tag{7}$$

Para que el equilibrio sea estable las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio considerada deben de estar acotadas. Esto se consigue si la matriz de rigidez $\mathbf{K}$ es definida positiva. En este caso dicha matriz es diagonal y el coeficiente de φ en (7), por tanto basta con imponer que el coeficiente de la coordenada θ en la ecuación (6) sea positivo:

$$2k - 6mgl > 0 \quad \Rightarrow k_{\min} > 3mgl \tag{8}$$

3. Tomando $k = 6mgl\,(= 2k_{\min})$, el sistema de ecuaciones (6; 7) se expresa en forma matricial:

$$[\mathbf{M}]\left\{\begin{array}{c}\ddot{\theta}\\ \ddot{\varphi}\end{array}\right\} + [\mathbf{K}]\left\{\begin{array}{c}\theta\\ \varphi\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right\} \tag{9}$$

siendo:

$$[\mathbf{M}] = ml^2\begin{pmatrix}\frac{32}{3} & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \qquad [\mathbf{K}] = mgl\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{10}$$

Las frecuencias propias se obtienen resolviendo la ecuación bicuadrática que resulta de sustituir las expresiones de (10) en:

$$\left|-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}\right| = 0 \tag{11}$$

Operando se obtiene:

$$10\omega^4 - 25\frac{g}{l}\omega^2 + 9\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0 \tag{12}$$

y resolviendo y escogiendo únicamente las raíces positivas resulta finalmente:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{53}{80}}}\sqrt{\frac{g}{l}} = 1{,}4366\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{53}{80}}}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0{,}6603\sqrt{\frac{g}{l}}$$