

Mecánica

EXAMEN FINAL (13 de junio de 2000)

Apellidos

Nombre

N.º

Grupo

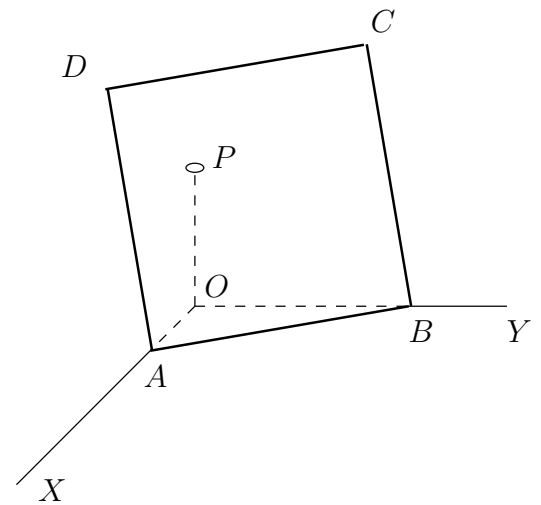
--	--	--	--

Ejercicio 5.º (puntuación: 10)

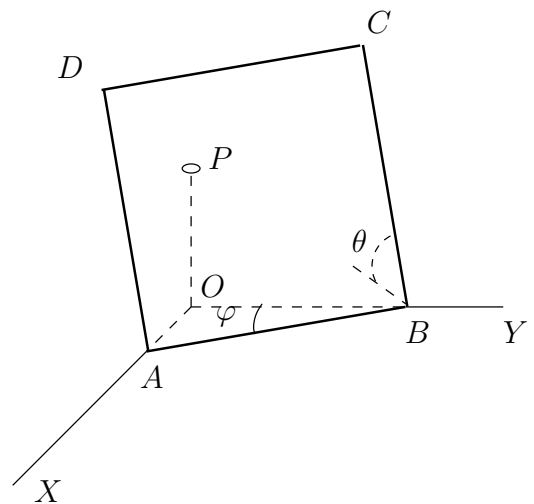
Tiempo: 60 min.

Una placa cuadrada $ABCD$ de lado $2a$ se mueve de modo que su vertice A está en el eje OX (ver figura) y el vertice B está en el eje OY . Además la placa se apoya sobre un punto fijo P situado en el eje OZ a una distancia a de O . Además de los ejes fijos $OXYZ$ se consideran unos ejes móviles $Axyz$ tal que Ax está sobre AB y Ay sobre AD . Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del movimiento de la placa $ABCD$ y definir claramente los parámetros necesarios para expresar la posición de dicha placa
2. Expresión de la velocidad angular de la placa en los ejes fijos $OXYZ$ y en los ejes móviles $Axyz$
3. Expresión de la aceleración angular de la placa, expresada en los ejes $Axyz$, particularizando su expresión para el instante en que AB forma 45° con OX
4. Expresión de la velocidad y aceleración del centro de la placa en el mismo instante que se ha considerado para el apartado anterior



1. La placa tiene un grado de libertad. Para comprenderlo basta con razonar que el enlace en A restringe dos grados de libertad, el de B otros dos, y el apoyo en P uno más; un total de 5 sobre los 6 grados de libertad del sólido libre. Para definir su posición se empleará el ángulo φ que forma el lado AB con el eje OY (ver figura). El ángulo θ de la figura, que representa la máxima pendiente, está completamente determinado para un valor dado de φ , por lo que no constituye un grado de libertad adicional.



2. Llamando $\{\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\}$ a los versores del sistema de referencia fijo, e $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ a los del sistema móvil, la velocidad angular se puede expresar:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{i} \quad (1)$$

siendo θ el ángulo que forma el plano de la placa con el plano OXY (ver figura). Como únicamente hay un grado de libertad, los ángulos $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ están relacionados. Dicha relación se obtiene con las distancias OP y OM (siendo M el pie de la perpendicular de O al lado AB):

$$\tan \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{a}{2a \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{1}{\sin 2\varphi} \quad (2)$$

Derivando (2):

$$\dot{\theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} = -\frac{2\dot{\varphi} \cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} \quad (3)$$

y eliminando de esta expresión θ en favor de φ mediante (2), se obtiene:

$$\dot{\theta} = -\frac{2\dot{\varphi} \cos 2\varphi}{1 + \sin^2 2\varphi} \quad (4)$$

Por último es necesario expresar los versores \mathbf{i} y \mathbf{K} en los sistemas fijo y móvil, respectivamente:

$$\mathbf{i} = -\sin \varphi \mathbf{I} + \cos \varphi \mathbf{J} \quad (5)$$

$$\mathbf{K} = \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \quad (6)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1) se obtiene la expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en los ejes fijos:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2\dot{\varphi} \cos 2\varphi}{1 + \sin^2 2\varphi} (-\sin \varphi \mathbf{I} + \cos \varphi \mathbf{J}) + \dot{\varphi} \mathbf{K} \quad (7)$$

Sustituyendo (4) y (6) en (1) se obtiene la expresión en los ejes móviles:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2\dot{\varphi} \cos 2\varphi}{1 + \sin^2 2\varphi} \mathbf{i} + \dot{\varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 2\varphi}} \mathbf{j} + \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 2\varphi}} \mathbf{k} \right) \quad (8)$$

3. Para obtener la aceleración angular es necesario derivar la expresión genérica de $\boldsymbol{\Omega}$ y particularizar posteriormente para $\varphi = \pi/4$. De (2) se deduce que en $\varphi = \pi/4$ también $\theta = \pi/4$. Teniendo en cuenta que la derivada absoluta coincide con la derivada relativa en los ejes móviles:

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\text{rel}} \quad (9)$$

basta con derivar las componentes de (8) y particularizar, para obtener finalmente:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 2\dot{\varphi}^2 \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ddot{\varphi} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ddot{\varphi} \mathbf{k} \quad (10)$$

4. Sea N el centro de la placa. Su velocidad se puede expresar en términos de la velocidad de A :

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AN} \quad (11)$$

Teniendo en cuenta las relaciones:

$$\mathbf{AN} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} \quad (12)$$

$$X_A = 2a \sin \varphi \Rightarrow \mathbf{v}_A = 2a\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{I} \quad (13)$$

$$\mathbf{I} = -\sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \cos \theta \mathbf{j} + \cos \varphi \sin \theta \mathbf{k} \quad (14)$$

y sustituyendo y operando en (11), se obtiene:

$$\mathbf{v}_N = -a\dot{\varphi} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mathbf{i} \quad (15)$$

La aceleración del punto N también se obtiene a partir de la aceleración del punto A :

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{AN} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AN}) \quad (16)$$

Con los resultados obtenidos en los apartados anteriores, sin más que sustituir en (16) y operar, se obtiene finalmente:

$$\mathbf{a}_N = -a\ddot{\varphi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{i} + a\dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{j} + a\dot{\varphi}^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{k} \quad (17)$$