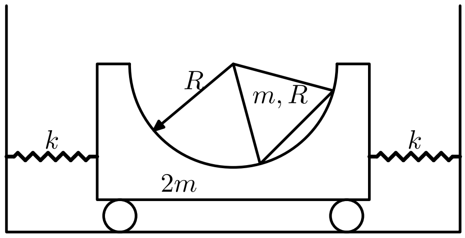
Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL (13 de junio de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10) Tiempo: 60 min.

Un carretón de masa $2m$ se desplaza sobre una recta horizontal lisa, estando unido por dos muelles de constante k a sendos puntos fijos. El carretón tiene un alojamiento semicircular de radio R sobre el que se apoya con ligadura bilateral lisa, una placa triangular equilátera de lado R y masa m. Suponiendo que en todo momento un lado del triángulo se apoya en el alojamiento del carretón, se pide:



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización de dichas ecuaciones para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
3. Particularizando para $R = 1$ y $k = mg/R$, obtener las frecuencias propias y los modos de oscilación.

1.— Tomaremos las coordenadas generalizadas (x, θ), siendo x el desplazamiento del carretón, positivo hacia la derecha, y θ el ángulo absoluto girado por el triángulo, positivo en sentido antihorario. Ambas coordenadas se miden a partir de la posición de equilibrio estable.

El movimiento del triángulo respecto del carretón es una rotación alrededor del centro del semicírculo con velocidad $\dot{\theta}$. Para calcular la energía cinética debemos obtener en primer lugar el momento de inercia del triángulo respecto de su centro de masa, que vale $\frac{1}{12}mR^2$. Por otra parte, la velocidad relativa del centro de masas del triángulo es $(R/\sqrt{3})\dot{\theta}$. La Lagrangiana vale

$$L = \frac{1}{2}2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{R^2}{3}\dot{\theta}^2 + 2\frac{R}{\sqrt{3}}\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mR^2\dot{\theta}^2 - 2\frac{1}{2}kx^2 + mg\frac{R}{\sqrt{3}}\cos\theta. \quad (1)$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de la dinámica de Lagrange:

$$3m\ddot{x} + m\frac{R}{\sqrt{3}}\cos\theta\,\ddot{\theta} - m\frac{R}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}^2 + 2kx = 0; \quad (2)$$

$$m\frac{R}{\sqrt{3}}\cos\theta\,\ddot{x} + \frac{5}{12}mR^2\ddot{\theta} + mg\frac{R}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta = 0. \quad (3)$$

2.— Las ecuaciones anteriores se linealizan considerando pequeños valores de $(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$ y despreciando infinitésimos de segundo orden:

$$3m\ddot{x} + m\frac{R}{\sqrt{3}}\ddot{\theta} + 2kx = 0; \tag{4}$$

$$m\frac{R}{\sqrt{3}}\ddot{x} + \frac{5}{12}mR^2\ddot{\theta} + mg\frac{R}{\sqrt{3}}\theta = 0. \tag{5}$$

Se pueden resumir mediante la expresión matricial

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}, \tag{6}$$

siendo

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 3m & m\frac{R}{\sqrt{3}} \\ m\frac{R}{\sqrt{3}} & \frac{5}{12}mR^2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & mg\frac{R}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

3.— Las frecuencias propias se calculan mediante la ecuación característica del problema de autovalores; sustituyendo los valores numéricos del enunciado resulta

$$|-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]| = \frac{11}{12}m^2\omega^4 - m^2 g\left(\frac{5}{6} + \sqrt{3}\right)\omega^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}m^2 g^2 = 0, \tag{8}$$

cuyas raíces positivas son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{11}}\sqrt{5 + 6\sqrt{3} - \sqrt{133 - 28\sqrt{3}}} = 0{,}7507\sqrt{g}; \tag{9}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{11}}\sqrt{5 + 6\sqrt{3} + \sqrt{133 - 28\sqrt{3}}} = 1{,}4950\sqrt{g}. \tag{10}$$

Los modos normales correspondientes a cada una de estas frecuencias se obtienen en cada caso mediante la ecuación homogénea

$$(-\omega_k^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{0}\}. \tag{11}$$

Del cálculo resulta:

$$\|\mathbf{a}_1\| = \left\|-\tfrac{5}{4} + \tfrac{3}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\sqrt{133 - 28\sqrt{3}}, 1\right\| = \|3{,}6462, 1\|; \tag{12}$$

$$\|\mathbf{a}_2\| = \left\|-\tfrac{5}{4} + \tfrac{3}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{4}\sqrt{133 - 28\sqrt{3}}, 1\right\| = \|-0{,}9501, 1\|. \tag{13}$$